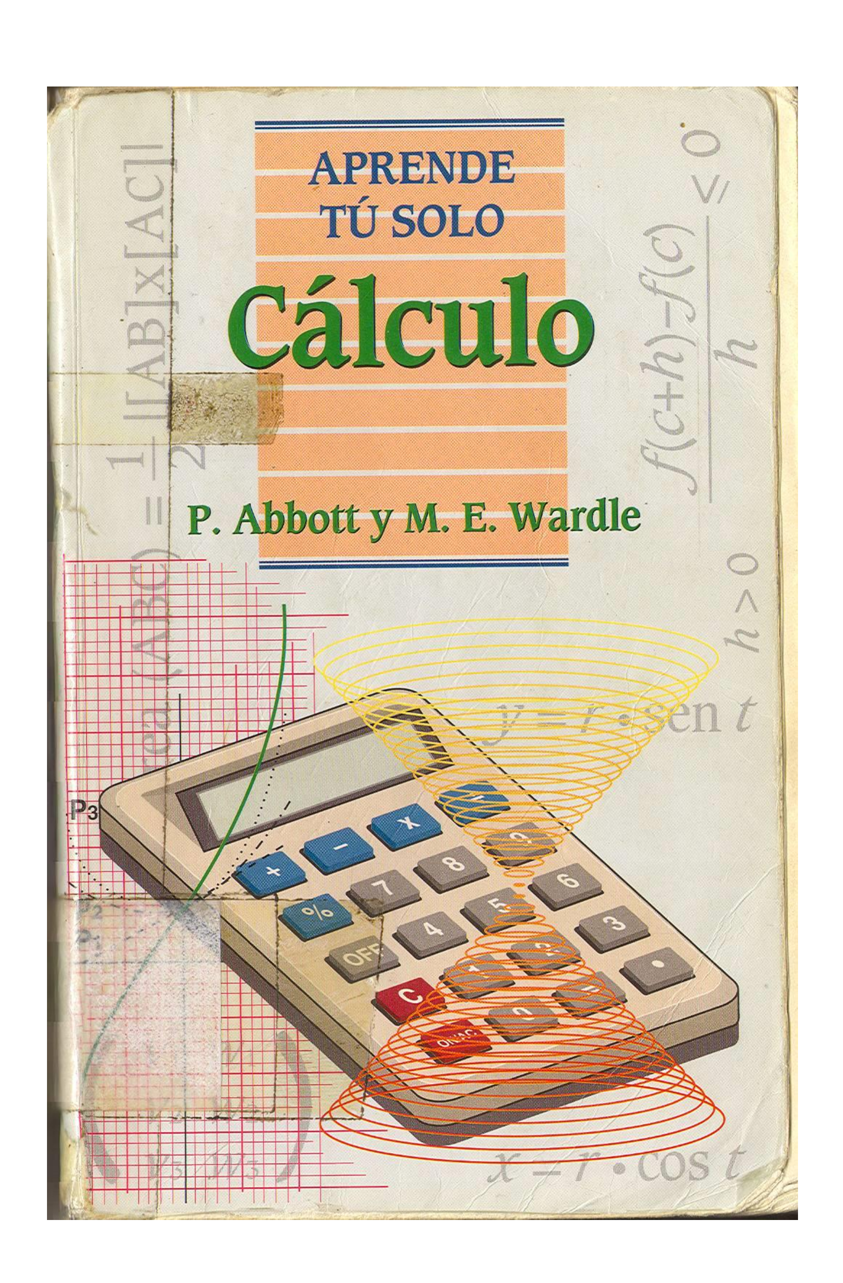

APRENDE
TÚ SOLO
Cálculo
P. Abbott y M. E. Wardle
y = r • sen t
x = r • cos t

Índice

Introducción

Hace algunos años se publicó un librito titulado *El cálculo hecho fácil*. El autor adoptaba el lema «lo que un tonto puede hacer, lo puede conseguir otro», pretendiendo de esa forma animar a los estudiantes desconfiados. Como el autor, sin embargo, confesaba enseguida que era «miembro de la Royal Society» es dudoso que estas palabras tranquilizaran a los que se proponían estudiar la materia.

En aquellos días el cálculo se consideraba por muchos como algo abstruso y fuera de los límites de las matemáticas elementales. Pero su utilización creciente en ingeniería y ciencias y el deseo consiguiente de poner este poderoso instrumento matemático al alcance de un círculo más amplio de estudiantes han conducido a una simplificación gradual en la presentación de sus contenidos. El presente volumen, en línea con este desarrollo, pretende facilitar al estudiante que no puede disponer de la orientación y ayuda de un profesor la adquisición de un conocimiento práctico del cálculo. Al igual que otros libros de la serie, intenta, dentro de unas inevitables limitaciones de espacio, suministrar parte de la presentación e ilustraciones utilizadas por un profesor de la materia, especialmente en los primeros estadios de la enseñanza, cuando el estudiante intenta descubrir de qué va el asunto. Se ha incluido una sección al final del libro que ilustra cómo los aspectos numéricos del tema pueden manejarse utilizando una calculadora de bolsillo o un ordenador personal.

Quienes se propongan utilizar el libro querrán seguramente conocer qué conocimientos previos de otras ramas de las matemáticas van a necesitar. Se supone que los lectores poseen buenos

conocimientos de álgebra, trigonometría y los principios fundamentales de la geometría del tipo de los que se dan, por ejemplo, en los libros sobre estos temas en esta misma colección.

Quizá la mayor dificultad a la hora de escribir un libro de esta clase es decidir lo que en él se incluye y lo que se omite. El cálculo es tan amplio y profundo en sus ramificaciones y aplicaciones que continuamente acecha la tentación de incluir muchas cosas que las limitaciones que impone el espacio disponible hacen imposible. El autor, por tanto, se ha dejado llevar por el criterio de incluir lo que le ha parecido necesario para posibilitar y animar al estudiante a que siga estudiando en este campo y a que lo aplique en ciencias e ingeniería. Se han insertado los cinco últimos capítulos con la esperanza de que proyecten al alumno una luz acerca de las posibilidades del cálculo, incluido el trabajo numérico con una calculadora sencilla o un ordenador personal, y que le lleven a continuar en el estudio del mismo.

Siempre que ha sido posible se han simplificado y abreviado las «demostraciones» de muchos de los teoremas. En consecuencia, frecuentemente puede ser que carezcan de la rigurosidad y exactitud matemáticas que son posibles en un volumen mayor y más ambicioso. Esperamos, sin embargo, que las que se dan suministren al estudiante una base lógica suficiente para un estudio inteligente de la materia.

1 Funciones

1.1. Naturaleza del cálculo

La palabra «cálculo» viene de la palabra latina *calculus*, piedrecilla que empleaban los romanos para contar, es decir, para «calcular». Tal como se usa en el título de este libro, equivale a *Cálculo infinitesimal*, lo que implica un recuento o cálculo con números que son infinitesimalmente pequeños. Esto, probablemente, no dice mucho al principiante, y el sentido verdadero de la palabra no se comprenderá, como en otros muchos casos, hasta que el estudiante no se haya adentrado en su estudio. El siguiente ejemplo puede ayudarnos a esclarecer este punto.

Consideremos una pequeña planta en crecimiento. En términos simples, sabemos que crece gradual y continuamente. Si la examinanamos después de unos pocos días, el crecimiento será patente y fácil de medir. Pero si la observamos tras un intervalo de unos pocos minutos, aunque el crecimiento se ha producido, la cantidad es demasiado pequeña para ser distinguida. Si la observamos tras un intervalo de tiempo aún más pequeño, por ejemplo, unos cuantos segundos, aunque no podamos detectar ningún cambio, sabemos que ha tenido lugar un crecimiento que, por utilizar un término matemático, puede considerarse como una cantidad infinitesimalmente pequeña, o *infinitesimal*.

El proceso de crecimiento o aumento gradual y continuo puede observarse en otros innumerables ejemplos, de los cuales el caso del organismo al que nos acabamos de referir es sólo un caso particular. Lo que en la mayoría de los casos es realmente importante no es,

necesariamente, la cantidad real de crecimiento o aumento, sino la *tasa de crecimiento* o *aumento*. Este problema, estructuralmente conectado como está con los aumentos infinitesimales, constituye la base del *cálculo infinitesimal*, y más en especial de esa parte que se llama *cálculo diferencial*. El sentido de la palabra diferencial se explicará más adelante.

Nota histórica: El cálculo es la invención matemática más poderosa de la época moderna. El mérito de su descubrimiento fue reclamado por sir Isaac Newton y por el gran matemático alemán Gottfried W. Leibnitz, y durante muchos años se mantuvo una agria polémica en Inglaterra y Alemania acerca del descubridor del cálculo. Leibnitz fue el primero que publicó un relato del cálculo, en 1684, aunque su libro de apuntes demostraba que ya utilizó el método por primera vez en 1675. Newton publicó su libro sobre el tema en 1693, pero comunicó su descubrimiento a sus amigos en 1669. Hoy se está de acuerdo en que la base fundamental del invento fue alcanzada independientemente por los dos matemáticos.

1.2. Funciones

El estudiante constatará, a partir de sus conocimientos de álgebra, que el ejemplo que acabamos de citar del crecimiento de una planta es un caso de una relación funcional. Puede verse afectado por cambios en la temperatura, humedad, luz solar, etc., pero si éstas permanecen constantes, el *crecimiento es una función del tiempo*, aunque no seamos capaces de expresarlo de forma matemática.

Es deseable, por tanto, que empecemos el estudio del cálculo aclarando nuestras ideas sobre el significado de una función, ya que esto es fundamental para la comprensión del tema. El alumno debe haberse familiarizado con el significado de «función» durante sus estudios de álgebra. No obstante, damos a continuación una breve revisión del tema en favor de quienes no tengan ideas claras acerca de esta importante materia.

1.3. Variables y constantes

Algunas de las letras y símbolos utilizados para representar cantidades o números en una expresión algebraica o fórmula representan cantidades *variables*; otras representan *constantes*.

Así, en la fórmula del volumen de una esfera:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde V representa el volumen y r representa el radio de la esfera.

1. V y r varían en esferas diferentes y se llaman variables.
2. π y 4/3 son constantes, con cualquier tamaño de cualquier esfera.

Igualmente, en la fórmula de caída de un cuerpo:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

en la que s representa la distancia recorrida en la caída en un tiempo t,

s y t son variables.
1/2 y g son constantes.

1.4. Variables dependientes o independientes

En los ejemplos anteriores las variables son de dos clases.

Así, en $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ si el radio r aumenta o disminuye, el volumen V aumentará o disminuirá consiguientemente.

Esto es, *la variación de* V *depende la la variación de* r.

De forma semejante, en $s = \frac{1}{2}gt^2$, la distancia recorrida por el cuerpo en su caída s, depende del tiempo t.

Así, generalmente, se encontrará que en todas las fórmulas y expresiones matemáticas de esta clase existen *dos clases de variables: dependientes* e *independientes*.

Definición de función. *Generalmente, si dos cantidades variables* x *e* y *están tan relacionadas que, cuando se asigna un valor cualquiera a* x, *existe un determinado valor y sólo uno correspondiente de* y, *entonces* y *se denomina función de* x.

1.6. Expresión de funciones

Cuando se trata, en general, de relaciones funcionales, se emplean comúnmente letras como x e y para representar las cantidades variables. Así, en la expresión $y = x^2 + 3x$, cuando se asigna un valor cualquiera a x existe siempre un valor correspondiente de y. Se dice entonces que y se expresa como una función de x. Ejemplos semejantes son los siguientes:

$$y = \sqrt{x^3 + 5}$$

$$y = \log_{10} x$$

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

Es frecuente, cuando se trata de funciones de esta forma, utilizar las últimas letras del alfabeto para representar las variables; así, cuando se emplean x e y, la variable independiente se expresa generalmente por la x y la dependiente por la y.

Para los términos constantes que no son números, se escogen ordinariamente las primeras letras del alfabeto.

Así, en la forma general de la ecuación de la recta:

$$y = mx + b$$

x e y son variables, m y b son constantes.

Las funciones de los ángulos se expresan frecuentemente mediante las letras griegas θ (zeta) o ϕ (fi), y también la letra x.

1.7. Notación general de las funciones

Cuando es preciso denotar una función de x en general, sin especificar la forma de la función, se emplea la notación $f(x)$. En esta notación la letra f es la primera letra de «función», mientras que x o

cualquier otra letra que se puede utilizar indica las variables independientes. Así, $f(\theta)$ es una forma general de indicar una funcion de θ.

Otras formas de esta notación son $F(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$.

Una formulación del tipo

$$f(x) = x^2 - 7x + 8$$

o

$$f(x) = \operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta$$

define una función específica de la variable correspondiente.

Esta notación se emplea cuando se desea indicar que en una función particular, que ha sido definida, hay que introducir un valor numérico.

Así, si

$$f(x) = x^2 - 4x + 3$$

$f(1)$ indicaría el valor numérico de la función cuando x se sustituye por 1.

Así,

$$f(1) = 1^2 - (4 \times 1) + 3 = 0$$
$$f(2) = 2^2 - (4 \times 2) + 3 = -1$$
$$f(0) = 0 - 0 + 3 = 3$$
$$f(a) = a^2 - 4a + 3$$
$$f(a + h) = (a + h)^2 - 4(a + h) + 3$$

Y si

$$\phi(\theta) = 2 \operatorname{sen} \theta$$
$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2$$
$$\phi(0) = 2 \operatorname{sen} 0 = 0$$
$$\phi\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

1.8. Notación para los incrementos en las funciones

Si x es una variable cualquiera, el símbolo δx (o también Δx) se utiliza para denotar un incremento en el valor de x. Una notación similar se emplea para cualquier otra variable. El símbolo δ es la letra griega minúscula correspondiente a nuestra d y se pronuncia «delta». Contrariamente al uso ordinario del álgebra, δx no significa $(\delta \times x)$. Las dos letras no se pueden separar. Así, δx significa *un incremento de x*.

De acuerdo con la definición de una función, si y es una función de x, y x aumenta en δx, entonces y aumentará, y su incremento tendrá como notación δy.

Según esto, si

$$y = f(x)$$

entonces,

$$y + \delta y = f(x + \delta x)$$
$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

Si, por ejemplo,

$$y = x^3 - 7x^2 + 8x$$

y x aumenta en δx, y aumentará en δy.

Entonces:

$$y + \delta y = (x + \delta x)^3 - 7(x + \delta x)^2 + 8(x + \delta x)$$

De igual modo, si

$$s = ut + \frac{1}{2}at^2$$

y t aumenta en δt, s aumentará en δs.

Entonces:

$$s + \delta s = u(t + \delta t) + \frac{1}{2}a(t + \delta t)^2$$

A veces se emplean letras simples para denotar incrementos, en vez del método anterior. Por ejemplo, supongamos que $y = f(x)$, y que x aumente en h y k sea el correspondiente incremento de y.
Entonces:

$$y + k = f(x + h)$$

De donde:

$$k = f(x + h) - f(x)$$

1.9. Representación gráfica de funciones

Sea $f(x)$ una función de x. Por definición de función (apartado 1.5), para cada valor asignado a x hay un valor correspondiente de $f(x)$. Así, dando una serie de valores a x, se obtiene un conjunto correspondiente de valores de $f(x)$. Si se representan estos pares de valores de x y $f(x)$, se tiene una representación gráfica de $f(x)$.
Considérese el ejemplo de

$$f(x) = x^2 \quad \text{o} \quad y = x^2$$

Asignando a x los valores 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3, ..., obtenemos los valores correspondientes de $f(x)$ o y.
Así:

$$f(0) = 0$$
$$f(1) = 1, f(-1) = 1$$
$$f(2) = 4, f(-2) = 4$$
$$f(3) = 9, f(-3) = 9$$

A partir de estos valores deducimos que $f(-a)$ tiene el mismo valor que $f(a)$. De ahí que la curva tenga que ser simétrica alrededor del eje OY. Es una parábola y se representa en la figura 1.1.
Para los puntos sobre el eje OX de valores $x = 1, 2, 3, ...$, las longitudes de las correspondientes ordenadas representan a $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ..., y la ordenada correspondiente a $x = a$ representa a $f(a)$.

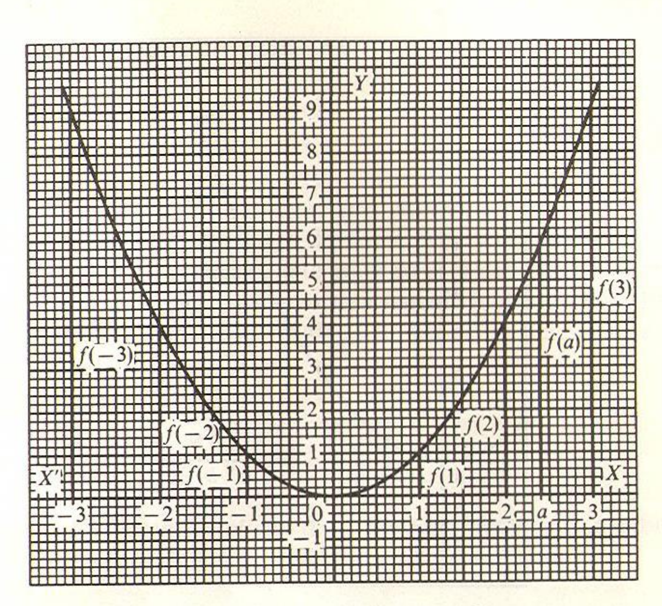


Figura 1.1.—Curva de $f(x) = x^2$.

En la figura 1.2, que muestra parte de la curva de $f(x) = x^2$, o $y = x^2$, tomamos los puntos L y N sobre el eje OX, de modo que

$$OL = a, \; ON = b$$

Trazando las correspondientes ordenadas KL y MN, tenemos

$$KL = f(a), \; MN = f(b)$$

En general, si L es un punto cualquiera sobre el eje OX, de modo que $OL = x$, y aumentamos x en LN, siendo $LN = \delta x$, MP representará el correspondiente incremento en $f(x)$ o y, entonces,

$$MP = \delta y$$

Puesto que

$$KL = f(x)$$
$$MN = f(x + \delta x)$$

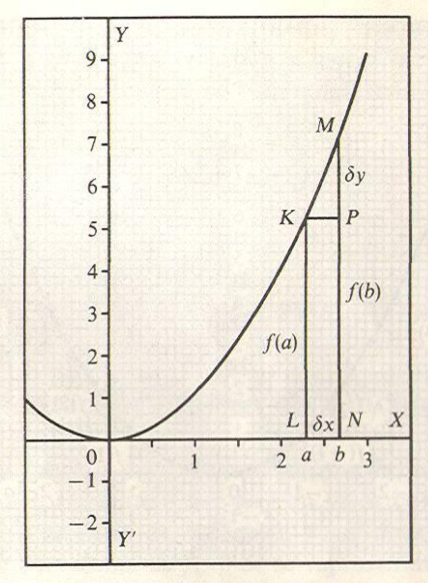


Figura 1.2.

entonces

$$MP = f(x + \delta x) - f(x)$$

o

$$\delta y = f(x + \delta x) - f(x)$$

1.10. Funciones inversas

Sea $y = x^2$; entonces $x = \sqrt{y}$.

En la primera ecuación, y se expresa en términos de x, y es una función de x. En la segunda, x se expresa en términos de y, esto es, como una función de y. Las dos funciones, $y = x^2$ y $x = \sqrt{y}$, se llaman *funciones inversas.*

Se pueden encontrar ejemplos semejantes, como

— Si $y = a^x$, entonces $x = \log_a y$.

— Si $y = \operatorname{sen} x$, entonces $x = \operatorname{sen}^{-1} y$.

1.11. Funciones implícitas

Si una ecuación como

$$x^2 - 2xy - 3y = 4$$

puede ser satisfecha por valores de x e y, pero x e y están los dos en el mismo lado de la ecuación, esto es, y no está definida directamente en términos de x, se dice que y es una *función implícita* de x. En este caso particular es posible resolver la ecuación respecto a y en términos de x, haciendo a

$$y = \frac{4 - x^2}{2x + 3}$$

la cual es una función *explícita* de y. Pero no siempre es posible una solución. Otros ejemplos de funciones implícitas son:

$$x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 7 = 0$$
$$x \log y + y^2 = 4xy$$

1.12. Funciones de más de una variable

Hemos estado tratando con cantidades que son funciones de una sola variable; pero existen cantidades que son funciones de dos o más variables. Por ejemplo, el *área de un triángulo* es una función tanto de la base como de la altura; el *volumen de una masa de gas definida* es una función de la presión y de la temperatura; el *volumen de una habitación rectangular* es una función de tres variables, la longitud, la anchura y la altura de la habitación; la *resistencia de un hilo metálico a la corriente eléctrica* es una función de la longitud del hilo y de su sección.

En este libro, sin embargo, nos limitaremos principalmente a funciones de una sola variable.

EJERCICIOS

1. Si $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$, encontrar los valores de $f(1), f(0), f(2), f(-2), f(a), f(x + \delta x)$.

2. Si $F(x) = (x - 1)(x - 5)$, encontrar los valores de $f(2), f(1), f(0), f(a + 1), f(1/a), f(-5)$.

3. Si $f(\theta) = \cos\theta$, encontrar los valores de $f(\pi/2), f(0), f(\pi/3), f(\pi/6), f(\pi)$.

4. Si $f(x) = x^2$, encontrar los valores de $f(3), f(3{,}1), f(3{,}01), f(3{,}001)$. Encontrar también el valor de $\dfrac{f(3{,}001) - f(3)}{0{,}001}$.

5. Si $\phi(x) = 2^x$, encontrar los valores de $\phi(0)$, $\phi(1)$, $\phi(3)$, $\phi(0{,}5)$.

6. Si $F(x) = x^3 - 5x^2 - 3x + 7$, encontrar los valores de $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$, $F(-x)$.

7. Si $f(t) = 3t^2 + 5t - 1$, encontrar una expresión para $f(t + \delta t)$.

8. Si $f(x) = x^2 + 2x + 1$, encontrar una expresión para $f(x + \delta x) - f(x)$.

9. Si $f(x) = x^3$, encontrar expresiones para:

a) $f(x + \delta x)$.

b) $f(x + \delta x) - f(x)$.

c) $\dfrac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$.

10. Si $f(x) = 2x^2$, encontrar expresiones para:

a) $f(x + h)$.

b) $f(x + h) - f(x)$.

c) $\dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

2 Variaciones en las funciones. Límites

2.1. Variaciones en las funciones

A partir de la definición de una función, sabemos que cuando la variable independiente cambia de valor, la función cambia también su valor. Vamos a examinar ahora en unos cuantos ejemplos cómo cambia la función. Consideremos las variaciones de la función cuando cambia la variable independiente en un intervalo de valores numéricos. La gráfica de una función nos suministra un modo claro de observar estos cambios.

En primer lugar, consideraremos la función ya familiar:

$$f(x) = x^2 \text{ o } y = x^2$$

y nos referiremos a su representación gráfica de la figura 1.1. En ella se muestra, dentro de los límites de los valores representados, cómo cambia la función conforme cambia x. De modo convencional se representa x como aumentando a través de toda la escala numérica marcada sobre el eje OX. Los valores de la función x^2 se representan de forma similar a lo largo de toda la otra escala numérica sobre el eje de las y (OY).

Recordando que los valores de x se representan como *creciendo continuamente de izquierda a derecha*, vemos, al examinar la curva, que:

1. Al aumentar x continuamente desde valores negativos hasta cero, los valores de y son positivos y disminuyen hasta cero en el origen.

2. Al aumentar x continuamente, desde valores positivos, y también aumenta y es positivo.
3. En el origen, y deja de disminuir y empieza a aumentar. Esto se denomina *extremo* de la curva o *punto estacionario.*
4. Si aumenta x indefinidamente, y aumentará también indefinidamente. Para valores numéricos de x negativos, pero muy grandes, y es también muy grande y positivo.

2.2. Variaciones en la función $y = 1/x$

Al considerar esta función, recordemos el efecto en una fracción de los cambios en el valor del denominador. Se observa que si el numerador de una fracción permanece constante:

1. Al aumentar el denominador, disminuye la fracción.
2. Al disminuir el denominador, aumenta la fracción.

Así, en la función $y = 1/x$:

1. Si x es muy grande, por ejemplo 10^{10}, y es un número muy pequeño.
2. Si $x = (10^{10})^{10}$, $y = 1/[(10^{10})^{10}]$, un número extraordinariamente pequeño.

Estos dos tipos de números, los muy grandes y los muy pequeños, se pueden especificar en forma aritmética. Son números *finitos.*

Sin embargo, si imaginamos que x aumenta de forma que sea un número mayor que cualquier número que se pueda expresar en forma aritmética, hablamos entonces de ese número como algo que *puede aumentar sin límites.* Se dice entonces que el número se aproxima al *infinito*, que representamos con el símbolo ∞.

Éste no es un número con el que se puede operar. Al multiplicar o dividirlo por un número finito cualquiera, obtenemos siempre un infinito.

Es evidente, por el anterior razonamiento, que cuando x se hace infinitamente grande, la función $1/x$, que se puede representar ahora por $1/\infty$, se hace una magnitud infinitamente pequeña, menor que cualquier número finito que se pueda especificar o representar en términos aritméticos. Esto se representa por cero, esto es, 0.

En este sentido, debemos imaginar el cero no como un número, sino como una magnitud arbitrariamente pequeña. Al multiplicarla o dividirla por un número finito cualquiera no se altera, sigue siendo cero.

No obstante, si se divide un número finito por cero en el sentido del párrafo anterior —por ejemplo, si la función anterior se convierte en $1/0$—, entonces, por el mismo razonamiento de antes, pero a la inversa, el resultado será una magnitud infinitamente grande[1].

Estas conclusiones se deben expresar de la siguiente forma, utilizando la notación empleada en álgebra:

— Cuando $x \to \infty$, $1/x \to 0$.
— Cuando $x \to 0$, $1/x \to \infty$.

Conviene advertir que se alcanzarán las mismas conclusiones si el numerador es un número finito cualquiera, por ejemplo, a/x, siendo $a \neq 0$.

Las anteriores conclusiones pueden ilustrarse dibujando la gráfica de $y = 1/x$ (Fig. 2.1).

Representando la curva a partir de la correspondiente tabla de valores, obtenemos la curva que se muestra en la figura 2.1, llamada *hipérbola*, que se compone de dos ramas de idéntica forma, correspondientes a valores positivos y negativos de x.

Centrándonos en la rama positiva, observamos la expresión gráfica de las conclusiones anteriormente alcanzadas.

1. Al aumentar x, y disminuye y la curva se aproxima al eje de las x. Claramente, al acercarse x al infinito, la distancia entre la curva y OX se hace infinitamente pequeña y la curva tiende a coincidir con OX a una distancia infinita. En términos geométricos, el eje de las x es tangente a la curva en el infinito.
2. Para valores entre 0 y 1 se observa que la curva tiende a coincidir con OY a una distancia infinita, esto es, el eje de las y también es tangente a la curva en el infinito.

---

[1] Realmente no se deberían dividir los números finitos por cero. Una técnica mejor que utilizar $1/0$ es tomar $1/h$, donde el valor de h se hace pequeño y finalmente $h \to 0$; esto hace que $1/h \to \infty$.
(Si $h < 0$, entonces $1/h \to -\infty$.)

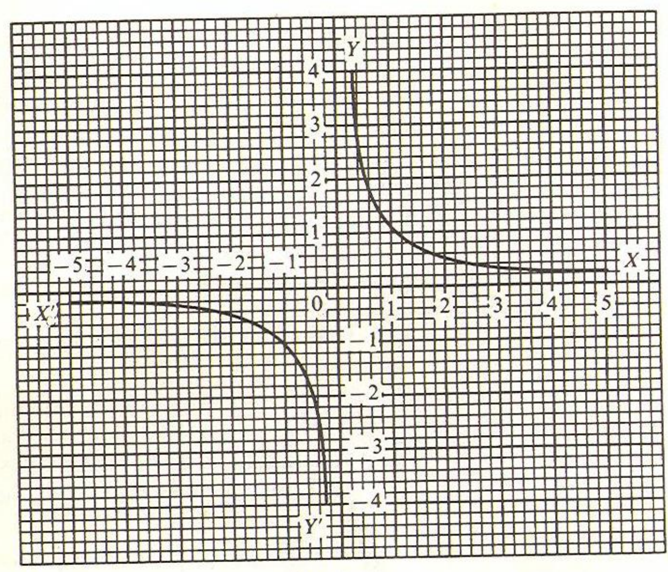


Figura 2.1.

Una línea recta que se encuentra con una curva a una distancia infinita, y es, por tanto, tangente a la curva, se llama una asíntota a la curva.

Así, los dos ejes son asíntotas a la curva $y = 1/x$.

Los razonamientos utilizados se aplican igualmente a la rama de la curva correspondiente a valores negativos de x. Los dos ejes son asíntotas a la curva en direcciones negativas.

Podemos observar algunas otras características de la función $y = 1/x$.

En todo el intervalo de valores numéricos de x, desde $-\infty$ a $+\infty$, y siempre aumenta. El cambio brusco desde $-\infty$ a $+\infty$, cuando x pasa por 0, se considerará más tarde. El mismo cambio ocurre en la curva de $y = \operatorname{tg} x$.

2.3. Límites

Si en una función fraccionaria de x el numerador y el denominador contienen x, y si cada uno se aproxima al infinito cuando x

tiende al infinito, entonces la fracción finalmente adopta la expresión formal $\frac{\infty}{\infty}$. Por ejemplo, si

$$f(x) = \frac{2x}{x + 1}$$

el numerador y el denominador se hacen infinitos cuando x se hace infinito. La cuestión que surge entonces es si se puede dar algún significado a la fracción cuando adopta la forma ∞/∞. En este caso, se puede encontrar un sentido de la manera siguiente.

Dividiendo el numerador y el denominador por x, tendremos:

$$f(x) = \frac{2x}{x + 1} = \frac{2}{1 + \frac{1}{x}}$$

Si ahora $x \to \infty$, entonces $1/x \to 0$. Por consiguiente, en el límite la fracción tiende al valor $2/(1 + 0) = 2$, pero nunca puede sobrepasar este número, esto es, $2x/(x + 1)$ tiende al valor límite 2 cuando x tiende al infinito. Por tanto, se dice que 2 es el *límite* al que tiende $2x/(x + 1)$ cuando x tiende al infinito; este valor se llama *valor límite* o *límite de la función.*

Se emplea la siguiente notación para designar un «límite» de una función

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x + 1} = 2$$

El valor al que tiende x cuando se acerca a un límite se indica por $x \to \infty$, colocado debajo de lím.

La idea de límite es de enorme importancia no sólo para el Cálculo Diferencial, sino para todo tipo de matemáticas avanzadas.

2.4. Límite de una función que toma la forma 0/0

Examinemos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

Es fácil hallar el valor de esta función para un valor cualquiera de x. Pero si se asigna a x el valor 2, el numerador y el denominador se hacen 0 y la fracción adopta la forma 0/0. Esta forma se llama *indeterminada* y sería erróneo pensar que su valor es 0.

La forma 0/0 es muy importante en matemáticas y debe ser investigada cuidadosamente más en profundidad.

Comencemos asignando a x diversos valores, ligeramente mayores o menores que el que produce la forma indeterminada, el valor 2:

1. Hagamos $x = 2{,}1$. Entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4{,}41 - 4}{2{,}1 - 2} = \frac{0{,}41}{0{,}1} = 4{,}1$$

2. Hagamos $x = 2{,}01$. Entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4{,}0401 - 4}{2{,}01 - 2} = \frac{0{,}0401}{0{,}01} = 4{,}01$$

3. Hagamos $x = 2{,}001$. Entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{4{,}004001 - 4}{2{,}001 - 2} = \frac{0{,}004001}{0{,}001} = 4{,}001$$

O, tomando valores menores de 2:

4. Hagamos $x = 1{,}9$. Entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3{,}61 - 4}{1{,}9 - 2} = \frac{-0{,}39}{-0{,}1} = 3{,}9$$

5. Hagamos $x = 1{,}99$. Entonces:

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{3{,}9601 - 4}{1{,}99 - 2} = \frac{-0{,}0399}{-0{,}01} = 3{,}99$$

Al comparar estos resultados se llega a la conclusión de que, conforme el valor de x se aproxima a 2, el valor de la fracción tiende

a 4, y que, finalmente, cuando el valor de x difiere de 2 en un número arbitrariamente pequeño, el valor de la fracción también difiere de 4 en un número arbitrariamente pequeño. Esto podría expresarse en la forma anteriormente utilizada:

Si:

$$x \to 2, \quad \frac{x^2 - 4}{x - 2} \to 4$$

se ve, por tanto, que la función $\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ tiene un valor límite cuando x se aproxima a 2 o, con la notación de los límites:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = 4$$

Estudiemos ahora el problema en una forma más general, tomando como ejemplo la fracción

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a}$$

y calculando su valor cuando $x \to a$. [*Nota*: Si $x = a$, la fracción se convierte en 0/0, lo cual no es de mucha ayuda.]

Siguiendo el método empleado antes, pero en una forma general, sea

$$x = a + h$$

esto es, h es la cantidad variable en la que x difiere de a para cualquier valor dado de x. Sustituyendo en la fracción

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = \frac{(a + h)^2 - a^2}{(a + h) - a} = \frac{2ah + h^2}{h}$$

Dividiendo el numerador y el denominador por h, que no es cero,

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a + h$$

Conforme h disminuye, el valor de x se aproxima a a, o cuando x se aproxima al valor de a, h se aproxima a 0.

Entonces, $2a + h$ tiende a $2a$.

Esto es, conforme el valor de x se aproxima al de a, $\dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$ se aproxima a $2a$.

O, utilizando los símbolos empleados antes, cuando

$$x \to a, \quad h \to 0$$

y

$$\frac{x^2 - a^2}{x - a} \to 2a$$

esto es, $2a$ es el valor límite de la función.

Con la notación empleada anteriormente:

$$\lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = 2a$$

Se observa, por tanto, que la expresión 0/0, tal como se ha utilizado en los ejemplos anteriores, se puede considerar como una representación del cociente de dos magnitudes infinitamente pequeñas. El valor de este cociente se aproxima en muchos casos a un límite finito cuando el numerador y el denominador se aproximan a 0.

2.5. Límite de una serie

En los apartados anteriores hemos considerado un ejemplo simple del límite de una función, pero ya sabemos, por los conocimientos de álgebra, que el término «límite» también se emplea en ciertos casos asociado a la suma de los términos de una serie. En una progresión geométrica, si la razón común es una fracción propia, la suma de los términos de la serie, cuando su número se hace grande, se aproxima a un número finito que se llama *límite de la suma*. En este capítulo, nos limitaremos sólo a la expresión de este límite tal como se deduce de la fórmula general para la suma de n términos.

Si

a es el primer término de la serie,
n es el número de términos,
r es la razón común,
S_n es la suma de los n primeros términos,

entonces,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$$

o

$$S_n = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} \tag{1}$$

Si r es una fracción propia, esto es, $r < 1$, el valor de r^n disminuye al aumentar n. Utilizando la notación empleada anteriormente, cuando

$$n \to \infty, \quad r^n \to 0$$

y

$$ar^n \to 0$$

De ahí que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{ar^n}{1 - r} \right) = 0$$

Consiguientemente, es evidente a partir de (1) que S_n se aproxima a $a/(1 - r)$ cuando n se hace en el límite infinitamente grande.

Así, $a/(1 - r)$ se convierte en el límite de la serie cuando n se hace infinitamente grande, y se llama *suma de los infinitos términos de la serie geométrica.*

Si r es un número mayor que la unidad, la magnitud de los términos aumenta cuando n aumenta; y si n se aproxima al infinito, también lo hará la suma.

Conforme se amplían los conocimientos matemáticos, aumenta también el interés por muchas series de diversas clases, y se va apreciando la importancia de saber lo siguiente acerca de la suma de n términos, cuando n se hace infinitamente grande.

¿Tiende la suma a un límite finito?

o

¿Se hace la suma infinita?

Si la suma de la serie tiende a un límite finito, se llama *convergente*, pero si la suma se hace infinita se llama *divergente*.

Con unas pocas excepciones, la mayoría de las series son convergentes o divergentes. Volveremos a tratar el tema en el capítulo 19[2].

2.6. Un límite trigonométrico, $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen} \theta}{\theta} = 1$

[*Nota.* A lo largo de este libro se supondrá, a menos que se especifique lo contrario, que los ángulos se miden en *radianes*, esto es, en fracciones de círculo.]

Está claro que cuando θ se hace muy pequeño, también disminuye $\operatorname{sen}\theta$, de modo que finalmente cuando θ, y consiguientemente $\operatorname{sen}\theta$, tienden a 0, la razón $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ tiende a 0/0. El límite de este cociente se puede encontrar de la manera siguiente: En la figura 2.2, sea O el centro de un círculo de radio unidad. Sea BAC un arco de este círculo y BC la cuerda de ese arco. Sea OA el radio que corta a BC en su punto medio formando ángulos rectos y, consiguientemente, corta por su mitad al arco BC. Desde los puntos B y C, trazar las tangentes BT y CT a la circunferencia. Estas rectas, al prolongarse, se cortarán sobre OA.

Sea AOB un ángulo de θ radianes. Entonces,

$$TB + TC > \text{arco } BAC$$

---

[2] Un ejemplo de una serie infinita que no converge o diverge es $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$ en el caso especial en que $x = 1$, lo que da $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots$ Si el número de términos es *impar*, la suma es 1; si el número es *par*, la suma es cero. Se dice que la serie *oscila*, o que la serie es *oscilante*.

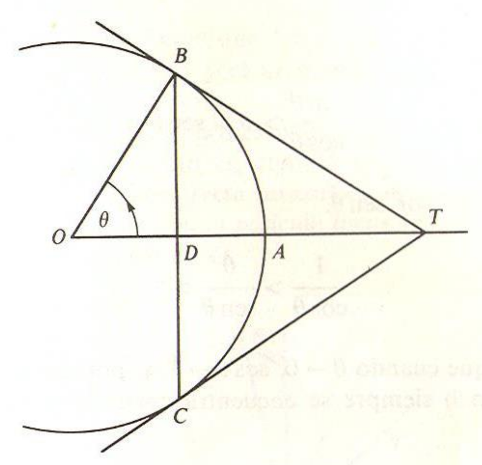


Figura 2.2.

y también

$$\text{arco } BAC > \text{cuerda } BC$$

Considerando sus mitades,

$$BT > \text{arco } BA > BD \qquad (2)$$

Ahora, $\operatorname{tg}\theta = BT/OB = BT$, puesto que OB es la longitud unidad.
Similarmente,

$$\theta = \frac{\text{arco } BA}{OB} = \text{arco } BA$$

puesto que OB es la longitud unidad, y

$$\operatorname{sen}\theta = BD/OD = BD$$

puesto que OB es la longitud unidad.
Luego a partir de (2),

$$\operatorname{tg}\theta > \theta > \operatorname{sen}\theta$$

o

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} > \theta > \operatorname{sen}\theta$$

Dividiendo todo por $\operatorname{sen}\theta$,

$$\frac{1}{\cos\theta} > \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} > 1$$

Pero, puesto que cuando $\theta \to 0$, $\cos\theta \to 1$, y, por tanto, $1/(\cos\theta) \to 1$, y como $\theta/(\operatorname{sen}\theta)$ siempre se encuentra entre $1/(\cos\theta)$ y 1, tendremos que

$$\text{cuando } \theta \to 0 \text{ y } \frac{1}{\cos\theta} \to 1$$

$$\frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \to 1$$

esto es, cuando $\theta \to 0$, $(\operatorname{sen}\theta)/\theta$ tiende a la unidad como límite o

$$\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1$$

Se deja al lector que demuestre, utilizando el razonamiento anterior, que cuando $\theta \to 0$, $(\operatorname{tg}\theta)/\theta$ se aproxima a la unidad como límite.

2.7. Ilustración geométrica de un límite

Sea OAB un círculo, y sea OB una cuerda que corta la circunferencia en O y B.

Supongamos que la cuerda OB gira hacia la derecha alrededor de O. El punto de intersección B se desplazará a lo largo de la circunferencia hacia O. Por consiguiente, el arco OB y la cuerda OB disminuirán.

Dejemos que el giro continúe hasta que B esté infinitamente cerca de O y que la cuerda y el arco se hagan infinitamente pequeños.

Es concebible que en la posición límite, cuando B se desplaza hasta coincidir con O —esto es, cuando los dos puntos de intersección coinciden—, la línea recta no corta a la circunferencia en un segundo punto. Por tanto, *en la posición límite la cuerda se convierte en una tangente al círculo en* O.

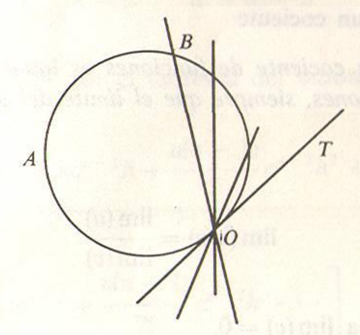


Figura 2.3.

2.8. Teoremas sobre límites

Definimos, sin demostrarlos, cuatro teoremas sobre límites, a los que nos referiremos más tarde.

[Esta parte puede omitirse en una primera lectura, si se desea.]

1. *Si dos variables son siempre iguales, sus límites son iguales.*

2. Límite de una suma

El límite de una suma de un número cualquiera de funciones es igual a la suma de los límites de las funciones.

Sean u y v funciones de la misma variable x.
Entonces,

$$\lim(u + v) = \lim(u) + \lim(v)$$

3. Límite de un producto

El límite del producto de un número cualquiera de funciones es igual al producto de los límites de las funciones.

Si u y v son funciones de x como antes, tendremos:

$$\text{lím}\,(u \times v) = \text{lím}\,(u) \times \text{lím}\,(v)$$

4. Límite de un cociente

El límite de un cociente de funciones es igual al cociente de los límites de las funciones, siempre que el límite del divisor no sea cero.

Análogamente,

$$\text{lím}\,(u/v) = \frac{\text{lím}\,(u)}{\text{lím}\,(v)}$$

siempre que no sea $\text{lím}\,(v) = 0$.

Ejemplos resueltos

1. Calcular el límite de $\dfrac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5}$ cuando x se hace infinito.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 - 5} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \dfrac{3}{x}}{2 - \dfrac{5}{x^2}} =$$

$$= \text{lím}\left(1 + \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x}\right) \div \text{lím}\left(2 - \lim_{x \to \infty} \frac{5}{x^2}\right) \quad \text{(Teorema 4)}$$

$$= \frac{1 + 0}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

2. Calcular el valor de $\lim_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a}$.

Cuando $x = a$, la función adopta la forma 0/0 y es, por tanto, indeterminada. Hagamos $x = a + h$, donde h es una cantidad pequeña. Entonces,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{(a + h)^n - a^n}{(a + h) - a}$$

Desarrollando $(a + h)^n$ por el teorema del binomio:

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{\left[a^n + na^{n-1}h + \dfrac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h^2 + \cdots\right] - a^n}{h} =$$

$$= \left[na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \cdots\right]$$

Pero como $x = a + h$, cuando

$$x \to a, \quad h \to 0$$

El límite es, por tanto,

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{h \to 0}\left[na^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}h + \cdots\right] = na^{n-1}$$

puesto que todos los otros términos tienen una potencia positiva de h como factor y, por tanto, se hacen 0 cuando $h \to 0$.

3. Calcular el límite de $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 2} - \sqrt{4 - x}}$ cuando $x = 3$.

El numerador y el denominador se anulan cuando $x = 3$. Entonces, la función adopta la forma 0/0.

Racionalizando el denominador,

$$\frac{x-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}} = \frac{(x-3)[\sqrt{x-2}+\sqrt{4+x}]}{(x-2)-(4-x)} =$$

$$= \frac{(x-3)[\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}]}{2x-6} = \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}}{2}$$

y sustituyendo x por su valor, $x = 3$, tendremos que el límite es

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{1}}{2} = 1$$

EJERCICIOS

1. *a*) ¿A qué número tiende la función $1/(x-1)$ cuando x tiende a infinito?

b) ¿Para qué valores de x es la función negativa?

c) ¿Cúales son los valores de la función cuando los valores de x son 2, 1,8, 1,5, 1,2, 1,1, 0,5, 0, -1, -2?

d) ¿Tiene límite la función cuando x tiende a 1?

e) Utilizando los valores de la función calculados en *c*), trazar su curva.

2. *a*) Calcular los valores de la función

$$\frac{3x+1}{x}$$

cuando x tiene los valores 10, 100, 1.000, 1.000.000.

b) ¿A qué límite tiende la función cuando x se hace muy grande? Encontrar el límite de la función utilizando el método del apartado 2.4.

3. *a*) Hallar $\lim_{x \to \infty} \frac{5x + 2}{x - 1}$.

b) Hallar el límite de la función cuando x tiende a $+1$.

4. *a*) Hallar los valores de la función

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

cuando x tiene los valores 10, 4, 2, 1,5, 1,1, 1,01.

b) Hallar el límite de $\frac{x^2 - 1}{x - 1}$ cuando x tiende a 1.

5. Hallar el límite de la función $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ cuando x tiende al infinito.

6. Hallar $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$.

7. Hallar el límite de $\frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$ cuando $h \to 0$.

8. Hallar el límite de la función $\frac{x}{2x + 1}$ cuando x tiende a ∞.

9. Hallar $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^2 + x - 1}{3x^2 + 2x + 1}$.

10. Demostrar, a partir de la demostración dada en el apartado 2.6, que $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{tg} \theta}{\theta} = 1$.

3 Tasa de variación de una función. Pendientes

3.1. Tasa de variación de una función

Hemos visto que el valor de una función cambia cuando cambia el valor de la variable de la que depende. La cuestión importante que surge inmediatamente es cómo determinar la velocidad de cambio o tasa de variación de la función respecto a la variable independiente.

En el cálculo interesa fundamentalmente la tasa de variación de una función con respecto al cambio del valor de la variable de la que depende.

Vamos a ilustrar los problemas que surgen examinando unos cuantos casos sencillos, y para ello utilizaremos la gráfica de una función, ya que la gráfica hace visibles los cambios en la función.

3.2. Movimiento uniforme

Se dice que un cuerpo se mueve uniformemente cuando recorre distancias iguales en intervalos iguales de tiempo. La distancia es una función del tiempo, y a partir de la anterior definición la velocidad de cambio de la función debe ser constante. Esto aparecerá en lo que sigue. Sea s la distancia recorrida y t el tiempo empleado en recorrerla. Entonces, se demuestra en los textos de Mecánica que

$$s = vt$$

siendo v, la velocidad (una constante), la distancia recorrida en cada segundo.

La razón de las dos variables, a saber s/t, es constante para todos los correspondientes valores de las mismas.

Considérese el siguiente ejemplo gráfico:

Un automóvil recorre las distancias siguientes en los tiempos que se indican en la tabla:

Tiempo, t (en segundos)	1	2	3	4	5
Distancia, s (en metros)	20	40	60	80	100

Estas distancias se consideran a partir de un punto determinado del movimiento.

Representando estos puntos y uniéndolos, se observa que están en una línea recta, como se ve en la figura 3.1, representación gráfica del proceso.

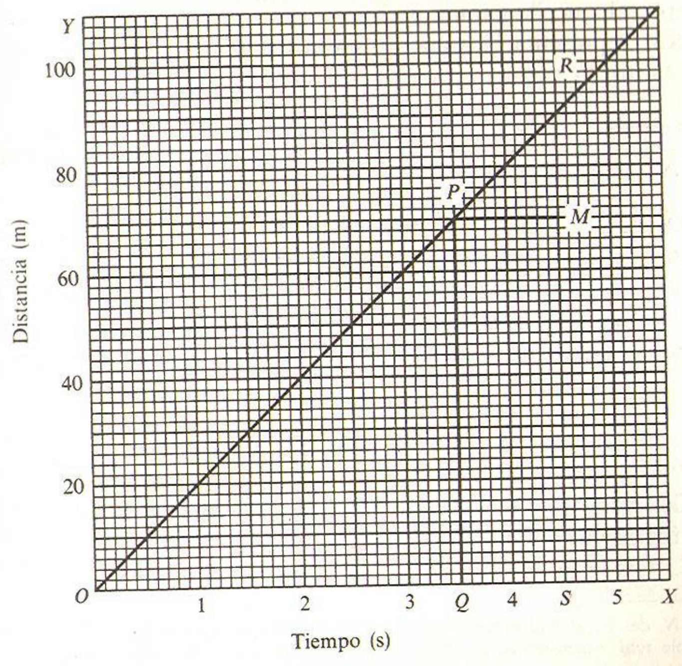


Figura 3.1.

Sean OQ y OS la representación de dos intervalos de tiempo, t. Entonces, PQ y RS representarán las distancias correspondientes, s. A partir del enunciado general anterior se sigue que

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS}$$

Esto es cierto para cualquier posición de P y R y, por tanto, la gráfica debe ser una línea recta.

Sea θ el ángulo que forma esta línea con OX, esto es, $<POQ$. Entonces:

$$\frac{PQ}{OQ} = \frac{RS}{OS} = \operatorname{tg}\theta$$

representa la pendiente o gradiente de la recta*.

Tracemos PM paralela a OX. Entonces, entre los intervalos de tiempo representados por OQ y OS, PM representa el aumento en el tiempo, al que llamamos δt.

RM representa el aumento en la distancia, al que llamamos δs. Por tanto, la razón

$$\frac{\text{Aumento en la distancia}}{\text{Aumento en el tiempo}} = \frac{\delta s}{\delta t} = \operatorname{tg}\theta = \text{Pendiente de la recta}$$

De aquí se sigue que, para cualquier par de valores correspondientes de s y t, la razón del aumento en la distancia respecto al aumento en el tiempo es constante e igual a la pendiente de la recta.

En el ejemplo anterior de movimiento uniforme, esta pendiente es 20 ms^{-1}, que es la *velocidad* del automóvil.

3.3. Pendiente de una función lineal

Generalizando lo anterior, sea y una función de x. La línea recta que representa la función puede ser de dos formas:

---

* *N. del T.:* «Gradiente» es más general; en el caso de funciones $y = f(x)$ de una variable real, «pendiente» parece más natural. Sin embargo, nunca se emplea «pendiente» para $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, funciones de varias variables reales.

1. *La función* y = mx

La representación gráfica es una recta que pasa por el origen. Comparándola con el ejemplo anterior, si δy y δx son los incrementos de y y x, $\delta y/\delta x$ es una constante que representa la pendiente de la recta. Pero esto se representa por m:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = m$$

Por tanto, m representa el incremento de velocidad de y con respecto a x.

2. *La función* y = mx + b

Esta recta no pasa por el origen, sino que corta al eje OY en un punto que está a una distancia b del origen.

En la figura 3.2 sea CPQ la recta cuya ecuación es $y = mx + b$.

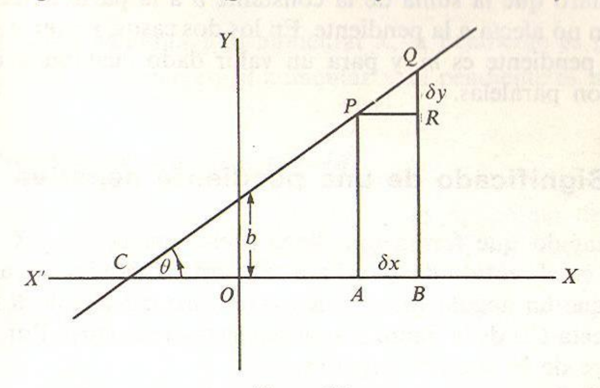


Figura 3.2.

Sea θ el ángulo que forma con OX, y sea P un punto cualquiera sobre la recta, de coordenadas (x, y). Entonces, $OA = x$, $PA = y$.

Aumentemos x en δx para convertir OA en OB. Aumentemos y en δy para convertir AP en BQ. Trazando la recta PR paralela a OX, obtenemos $QR = \delta y$. Entonces, las coordenadas de Q son $(x + \delta x, y + \delta y)$. Esto es,

$$OB = x + \delta x, \quad QB = y + \delta y$$

Sustituyendo en la ecuación sus valores:

$$y = mx + b \qquad (1)$$

$$y + \delta y = m(x + \delta x) + b \qquad (2)$$

Restando de (2) la (1):

$$\delta y = m(\delta x)$$

Luego

$$m = \frac{\delta y}{\delta x} = \operatorname{tg} QPR = \operatorname{tg}\theta$$

esto es, $\frac{\delta y}{\delta x}$ representa la pendiente de la recta. Por tanto, *la razón del aumento de* y *respecto al aumento de* x *es igual a la pendiente de la recta y es constante para todos los puntos de la misma.*

Es claro que la suma de la constante b a la parte derecha de la ecuación no afecta a la pendiente. En los dos casos, $y = mx$ e $y = mx + b$, la pendiente es m, y para un valor dado cualquiera de m las rectas son paralelas.

3.4. Significado de una pendiente negativa

El ángulo que forma una línea recta con el eje OX se mide siempre en el sentido de derecha a izquierda. Cuando este ángulo es mayor que un ángulo recto, como es el caso del ángulo θ formado por la recta CD de la figura 3.3, su *tangente es negativa.* Por tanto, la pendiente de la recta es negativa.

Sea P el punto (x, y), de modo que $OA = x$, y $PA = y$. Aumentemos x en δx, de modo que OA se convierta en OB.

El valor de la ordenada correspondiente se representa por QB. Dibujar la recta QR paralela a OX de forma que la *ordenada* PA *disminuya en* δy, *convirtiéndose en* QB.

Así, *mientras* x *aumenta en* δx, y *disminuye en* δy o, como también se puede expresar, hay un *aumento negativo*; por tanto,

$$\frac{\delta y}{\delta x} \text{ es negativa, esto es, } \operatorname{tg}\theta \text{ es negativa}$$

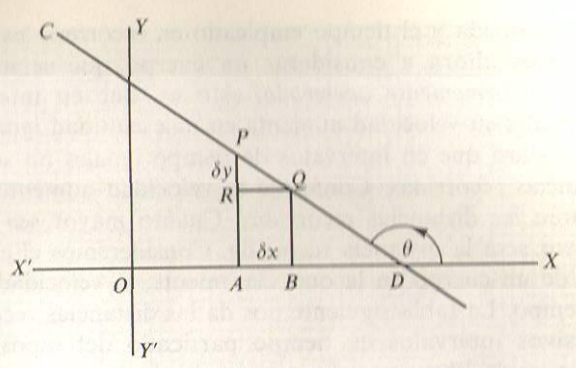


Figura 3.3.

Luego *el incremento de la tasa de* y *con respecto a* x *es ahora negativo.*

Resumiendo este resultado, junto con el anterior, podemos concluir:

1. Cuando aumenta y al aumentar x, la pendiente es positiva.
2. Cuando disminuye y al aumentar x, la pendiente es negativa.

3.5. Pendiente de una curva

La recta que representa la gráfica de un polinomio de primer grado es la única gráfica en la que la pendiente es constante, o sea, es la misma en todos los puntos de la recta.

Si la gráfica es una curva, el sentido del término pendiente de una curva no está nada claro, ya que éste cambia continuamente; igual ocurre con el sentido de pendiente en un punto sobre una curva. Es necesario, por tanto, emplear un poco de tiempo en investigar estas dificultades.

3.6. Gráfica del movimiento de un cuerpo que se desplaza con velocidad uniformemente acelerada

En el apartado 3.2 se ha establecido que si un cuerpo se mueve con velocidad *uniforme*, esto es, *constante*, la gráfica que relaciona la

distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla es una línea recta. Vamos ahora a considerar un cuerpo que se mueve con *velocidad uniformemente acelerada*, esto es, que en intervalos de tiempo iguales su velocidad aumenta en una cantidad igual. En este caso, está claro que en intervalos de tiempo iguales no son iguales las distancias recorridas. Conforme la velocidad aumenta, también aumentarán las distancias recorridas. Cuanto mayor sea la velocidad, mayor será la distancia recorrida. Consideremos el ejemplo de la caída de un cuerpo en la que, claramente, la velocidad aumenta con el tiempo. La tabla siguiente nos da las distancias recorridas en los sucesivos intervalos de tiempo partiendo del reposo por un cuerpo en caída libre, en valores redondeados.

Tiempo, t (en segundos)	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2,0
Distancia, s (en metros)	0	0,8	3,2	7,2	12,8	20,0

Cuando se representan los valores de distancia frente a los correspondientes de tiempo, se observa una curva suave como la de la figura 3.4. Claramente la curva tiene una pendiente cada vez más pronunciada conforme aumenta el tiempo, esto es, *la razón entre distancia y tiempo (la velocidad) aumenta.* La suavidad de la curva indica que este aumento de la velocidad es uniforme. Consideremos la razón del aumento de la distancia al aumento del tiempo a lo largo de cinco intervalos sucesivos, como se muestra en la tabla siguiente.

Intervalo de tiempo (en seg.)	0-0,4	0,4-0,8	0,8-1,2	1,2-1,6	1,6-2,0
Distancia (en m)	0,8	2,4	4,0	5,6	7,2
Distancia/Tiempo	2	6	10	14	18

Estas razones representan las velocidades medias para los intervalos correspondientes. Son las distancias que se recorrerían durante los intervalos, si el cuerpo se estuviera desplazando con velocidades uniformes iguales a estas velocidades medias. Es evidente que la velocidad media a lo largo de intervalos sucesivos iguales aumenta uniformemente.

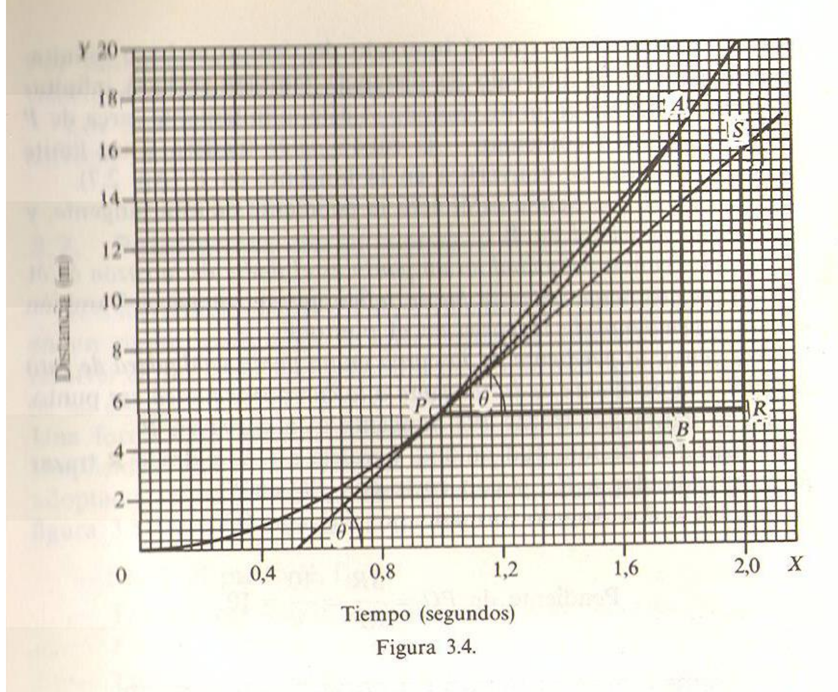


Figura 3.4.

Debe indicarse, como se muestra en el apartado 3.2, que las pendientes de las cuerdas que unen los puntos apropiados sobre la curva serán iguales a estas velocidades medias.

Para generalizar estas conclusiones, tómese un punto cualquiera P sobre la curva, y por él trácese una cuerda que corte a la curva en otro punto A.

Trácese la ordenada AB que corta en B la recta PB paralela al eje del tiempo.

Sea δt el incremento del *tiempo* entre las dos posiciones, esto es, $PB = \delta t$. Sea δs el incremento del *espacio* entre las dos posiciones, esto es, $AB = \delta s$.

Entonces, la *velocidad media en el intervalo* $= \delta s/\delta t$, que es igual a la pendiente de la cuerda PA.

Ahora, supongamos que el intervalo de tiempo, representado por δt, disminuye de forma continua. Entonces, la distancia δs también disminuirá, pero la razón de ambas continuará representando la velocidad media durante el intervalo y también la pendiente de la cuerda PA, la cual también disminuye.

Imaginemos ahora que el intervalo de tiempo se hace infinitamente pequeño. El intervalo de distancia también se hará infinitamente pequeño. En el límite, cuando A esté infinitamente cerca de P —esto es, cuando coincidan— la razón $\delta s/\delta t$ tenderá a un límite finito, y la cuerda se convertirá en la tangente en P (Ap. 2.7).

El límite al que tiende $\delta s/\delta t$ será la pendiente de esta tangente, y también la *velocidad* en P.

Así, el término *velocidad en un punto* es *el límite de la razón* $\delta s/\delta t$ *cuando las dos magnitudes se hacen infinitamente pequeñas*. También se llama *pendiente de la curva* en el punto P.

Por tanto, la pendiente de la curva en un punto cualquiera de ésta es igual a la pendiente de la tangente a la curva trazada en ese punto.

En la figura 3.5, trazar PQ, tangente a la curva en P.

Trazar PR, de longitud unidad, paralela a OX, y desde R trazar RS perpendicular a PR y con corte con PQ en S.

$<QPR = \theta =$ Ángulo formado por PQ con OX

$$\text{Pendiente de } PQ = \frac{SR}{RP} = \frac{10}{1} = 10$$

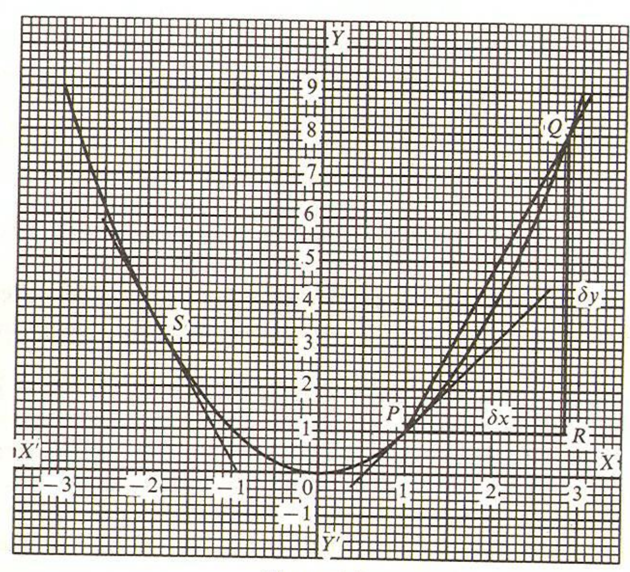


Figura 3.5.

Por tanto, la velocidad en el punto P es 10 ms^{-1}, esto es, la velocidad al final de 1 segundo es 10 ms^{-1}.

Los estudiantes de mecánica podrán verificar que la respuesta correcta sería unos 9,8 ms^{-1}.

3.7. Pendientes de la curva $y = x^2$

Los métodos empleados anteriormente para obtener la pendiente en un punto cualquiera de una curva se utilizarán ahora para resolver el problema más general del caso de una función algebraica. Se ha escogido la curva $y = x^2$ como un ejemplo simple y familiar. Una forma más general de esta función sería $y = ax^2$, pero por simplicidad vamos a tomar el caso en que $a = 1$. Los métodos adoptados se pueden acomodar fácilmente a cualquier valor de a. La figura 3.5 representa la curva $y = x^2$.

— Sea P el punto (1, 1).
— Trácese una cuerda PQ que corte a la curva en los puntos P y Q.
— Trácese una recta PR paralela a OX que corte en el punto R a la ordenada trazada desde Q.
— Hagamos QR, el incremento correspondiente de y, δy.
— Entonces, *la pendiente de la cuerda* $PQ = \operatorname{tg} QPR = \delta y/\delta x$.

También $\delta y/\delta x$ es igual a la velocidad media del incremento de y por unidad de incremento de x entre P y Q.

La expresión algebraica para $\delta y/\delta x$ se puede obtener de la manera siguiente: En la función

$$y = x^2 \tag{1}$$

cuando x aumenta en δx e y, correspondientemente, aumenta en δy, tenemos:

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2 \tag{2}$$

Restando (1) de (2):

$$\delta y = (x + \delta x)^2 - x^2$$

Luego:

$$\delta y = 2x\delta x + (\delta x)^2$$

Dividiendo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

A partir de aquí, el valor de $\delta y/\delta x$ se puede calcular para cualquier valor de δx en cualquier punto de la curva donde el valor de x es conocido.

Así, cuando $x = 1$, como es el caso del punto P sobre la curva anterior:

— Si $\delta x = 0{,}3$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 2 + 0{,}3 = 2{,}3$.

— Si $\delta x = 0{,}2$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 2 + 0{,}2 = 2{,}2$.

— Si $\delta x = 0{,}1$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 2 + 0{,}1 = 2{,}1$.

— Si $\delta x = 0{,}01$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 2 + 0{,}01 = 2{,}01$.

— Si $\delta x = 0{,}001$, $\dfrac{\delta y}{\delta x} = 2 + 0{,}001 = 2{,}001$.

Estos resultados muestran la pendiente de la cuerda PQ cuando δx disminuye y Q se traslada cerca de P. Entonces, es claro que la pendiente de la cuerda se aproxima a 2. Podemos concluir, por tanto, que cuando Q se desplaza para coincidir con P y la cuerda se convierte en la tangente a la curva en el punto P, *la pendiente de la tangente es 2.*

Podemos también decir que:

La velocidad de incremento de y *por unidad de incremento de* x *en el punto* P *es 2.*

Se pueden sacar conclusiones similares para cualquier punto de la curva, pero la pendiente de cada tangente dependerá del valor de

x en el punto; *la pendiente de una función, por tanto, es también una función de* x.

Así, en el punto de la curva $x = 3$, la pendiente de la tangente será 6.

Es evidente que las conclusiones a las que hemos llegado son válidas para cualquier curva de ecuación conocida. En general, por tanto, llegamos a la importante conclusión siguiente:

La pendiente en un punto cualquiera de una curva que represente una función es igual a la pendiente de la tangente trazada a la curva de dicho punto. Es también la velocidad del incremento de la función para el valor de x en dicho punto.

El gradiente de una recta es constante en todos los puntos y coincide con el valor de su pendiente. Por eso, podemos utilizar ambos términos indistintamente para una recta.

3.8. Pendiente negativa

En la figura 3.5 tomemos un punto S sobre la curva, correspondiente a un valor negativo de x. Trácese la tangente a la curva y prolónguese hasta cortar el eje. El ángulo formado con el eje es mayor que un ángulo recto; en consecuencia, *la pendiente es negativa*. Como se ha demostrado en el apartado 3.4, esto indica que la tasa del incremento de la función es negativa, esto es, la función disminuye. Un examen de la curva indica que cuando x aumenta desde valores negativos, $-\infty$, hasta cero, la función representada por la curva disminuye desde $+\infty$ hasta 0 en el origen. En este punto OX es tangente a la curva y la pendiente de la curva es cero.

EJERCICIOS

1. Trazar la recta $3x - 2y = 6$ y hallar su pendiente. Si P y Q son dos puntos sobre la recta tales que el valor de x en Q es mayor en 0,8 que el valor de x en P, ¿en qué cantidad será mayor el valor de y en Q respecto al valor de y en P?

2. Hallar las pendientes de las rectas:

a) $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 4.$

b) $4x + 5y = 16.$

c) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$

3. La pendiente de una recta es 1,2. La recta pasa por un punto cuyas coordenadas son (5, 10). ¿Cuál es la ecuación de la recta?

4. La distancia en metros recorrida por un cuerpo en caída libre partiendo del reposo viene dada, aproximadamente, por la expresión $s = 4{,}9t^2$. Si un incremento en el tiempo se representa por δt y el correspondiente incremento en la distancia por δs, deducir cómo se encontrará mediante el método empleado en el apartado 3.7 una expresión para δs en términos de δt para un valor cualquiera de t. A partir de ahí, hallar el valor de $\delta s/\delta t$. Utilizando este resultado, hallar la velocidad media para los intervalos de tiempo siguientes:

a) 2 s a 2,2 s.

b) 2 s a 2,1 s.

c) 2 s a 2,01 s.

d) 2 s a 2,001 s.

A partir de estos resultados, deducir qué velocidad parecerá tener el cuerpo al cabo de 2 segundos.

5. En la curva $y = x^2$, utilizando la notación empleada en el apartado 3.7, hallar el valor de $\delta y/\delta x$ cuando el valor de x se aumenta de 3 a 3,1, 3,01, 3,001, respectivamente. Deducir la pendiente de la tangente a la curva en el punto en que $x = 3$.

6. Trazar la curva de $y = x^3$ para valores de x entre 0 y 2. Deducir una expresión para δy en términos de x y δx. A partir de ahí, deducir una expresión para $\delta y/\delta x$. Dando a x los valores 2,1, 2,01, 2,001 y 2,0001, hallar el límite al que tiende $\delta y/\delta x$ cuando el valor de x tiende a 2.

A partir de este resultado calcular la pendiente de la tangente a la curva en el punto en que $x = 2$. Comprobar el resultado obtenido trazando la tangente a la curva en este punto.

7. Para la función $y = 1/x$ (véase la figura 2.1), encontrar una expresión para δy en términos de x y δx. A partir de ahí, deducir una expresión para $\delta y/\delta x$.

Dando a x los valores 1,1, 1,01, 1,001 y 1,0001, calcular el límite al que tiende $\delta y/\delta x$ cuando x tiende a la unidad. A partir de este resultado calcular la pendiente y el ángulo de la tangente a la curva en el punto $x = 1$. Comprobar el resultado obtenido trazando la curva y construyendo la tangente en este punto.

8. Hallar la pendiente de la tangente trazada en el punto en que $x = 1$ en cada una de las curvas siguientes:

a) $y = x^2 + 2$.

b) $y = x^2 - 3$.

9. Hallar la pendiente de la tangente trazada en el punto $x = 2$ en cada una de las curvas siguientes:

a) $y = 3x^2$.

b) $y = 2x^2 - 1$.

4 Derivada. Diferenciación

4.1. Aspecto algebraico de la tasa de variación de una función

En este capítulo vamos a dar un paso muy importante en el desarrollo de nuestro tema. Se sigue lógicamente de lo expuesto en el capítulo anterior. Para aclarar esto, resumiremos brevemente los pasos mediante los cuales hemos avanzado en el tema. Son los siguientes:

1. El *valor de una función* cambia al cambiar la variable de la que depende.

2. La *velocidad* a la que cambia la función tiene una gran importancia práctica y es necesario poder calcularla.

3. La *tasa de variación* (aumento o disminución) se puede hallar de la manera siguiente:

a) *Cuando la función es de primer grado*, dicha función puede representarse gráficamente mediante una línea recta, y *la pendiente de esta recta es igual a la tasa de variación de la función.*

Si y es una función de x y δx y δy son los correspondientes incrementos de x e y, la pendiente es igual a $\delta y/\delta x$. Ésta es constante a lo largo de la recta, esto es, la tasa de variación es uniforme.

b) *Cuando la función no es de primer grado*, su representación gráfica será una curva, y la tasa de variación de la función

será diferente en diferentes partes de la curva. Su valor en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la recta tangente en el punto de la curva correspondiente a un valor cualquiera asignado de x.

El método geométrico tiene muchas aplicaciones importantes, y como ilustración es sugerente, pero en la práctica la pendiente no se halla fácilmente por este método. Desde un punto de vista práctico y para un cálculo exacto, es necesario un método algebraico.

La determinación por métodos algebraicos en el caso de la función $y = x^2$ ha sido indicada en el apartado 3.7, cuando, mediante cálculos aritméticos, se demostró que los valores de $\delta y/\delta x$ tendían a un límite cuando x se aproximaba a un valor asignado. Por conveniencia, repetimos aquí los cálculos. Sea

$$y = x^2$$

Entonces,

$$y + \delta y = (x + \delta x)^2$$

Restando:

$$\delta y = (x + \delta x)^2 - x^2 = 2x(\delta x) + (\delta x)^2$$

Dividiendo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x \qquad (1)$$

Damos ahora un paso más.

Se ha demostrado geométricamente que cuando δx se aproxima a cero, la pendiente de la cuerda, que representa la tasa media del incremento de la función en el intervalo representado por δx, se aproxima gradualmente a la pendiente de la tangente en el punto correspondiente a un valor cualquiera asignado de x.

Así, la pendiente de la tangente, representada por el límite de $\delta y/\delta x$, *es igual a la tasa del incremento de la función para el valor asignado de* x.

Puesto que a partir de (1), para cualquier valor de δx

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x + \delta x$$

cuando $\delta x \to 0$, $\delta y/\delta x$ tiende a un límite y el límite de

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2x \qquad (2)$$

esto es, *cuando* $\delta x \to 0$, *el límite de* $\delta y/\delta x$ *representa la tasa del incremento de* y *con respecto a* x, *para cualquier valor asignado de* x.

Por ejemplo, cuando $x = 1$, el límite de $\delta y/\delta x = 2$, esto es, la tasa del incremento de y o x^2 con respecto a x es 2 (véase el Ap. 3.7).

De igual modo, cuando

$$x = 2, \quad \text{lím}\frac{\delta y}{\delta x} = 4 \quad \text{(Véase ej. 8, cap. 3.)}$$

y cuando

$$x = 3, \quad \text{lím}\frac{\delta y}{\delta x} = 6 \quad \text{(Véase ej. 5, cap. 3.)}$$

Utilizando la notación del apartado 2.3, podemos escribir (2) como:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = 2x$$

Una notación aún más conveniente se emplea para representar este límite:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} \quad \text{se representa por} \quad \frac{dy}{dx}$$

en la que la letra d se utiliza en lugar de la letra griega δ y se sobreentiende que $\delta x \to 0$.

Así, la expresión (2) se convierte en

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Este límite se llama derivada de la función con respecto a x, *la variable independiente.*

Así, cuando $y = x^2$, $2x$ es la derivada de y, o de x^2, con respecto a x.

Un procedimiento similar nos permitirá hallar la derivada de cualquier otra función.

4.2. Derivada

Resumiendo lo dicho en el apartado anterior, podemos concluir:

1. Si y es una función continua de x y δx es un incremento cualquiera del valor de x, habrá un incremento (o disminución) correspondiente en el valor de y, denotado por δy.
2. La razón $\delta x/\delta y$ representa la tasa media del incremento de y con respecto a x, cuando x aumenta a $x + \delta x$.
3. Puesto que y es una función continua de x, si δx se hace infinitamente pequeño, también se hace infinitamente pequeño δy.
4. Cuando $\delta x \to 0$, la razón $\delta y/\delta x$, en general, tiende a un límite finito, y esto se llama la *derivada* de y con respecto a x. Se representa por el símbolo dy/dx, esto es:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{dy}{dx}$$

El cálculo diferencial se ocupa fundamentalmente de la variación de las funciones y podemos considerar la *derivada como una medida de la tasa* de tales variaciones. Mide la tasa de cambio de su valor comparada con la de la variable de la que depende.

Así, para la función $y = x^2$, $dy/dx = 2x$. Cuando $x = 4$, y, o x^2, cambia su valor a ocho veces la velocidad a la que cambia x.

La *derivada* dy/dx también se llama a veces *coeficiente diferencial* de y con respecto a x, o *función derivada.*

La derivada de y *con respecto a* x *es una función de* x, y en el caso de que la función sea lineal, la función derivada es constante.

Notación para la derivada

Además de la forma dy/dx, la derivada y con respecto a x puede también denotarse por y'.

Así, si

$$y = x^2$$

entonces,

$$y' = 2x$$

En general, la derivada de $y = f(x)$ puede denotarse por $f'(x)$.

Las mismas formas se usan con otras letras que representan funciones. Así, si s es una función de t, la derivada de s con respecto a t se escribe ds/dt.

4.3. Diferenciación. Diferenciales

Se llama *diferenciación* al proceso de hallar el coeficiente diferencial o derivada de una función y usarla para los incrementos de dicha función cuando se incrementa la variable independiente. Dichos incrementos se llaman *diferenciales.*

La operación se puede expresar utilizando el *símbolo de operación* d/dx. Así, la diferenciación de x^2 con respecto a x se puede escribir como

$$\frac{d(x^2)}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(x^2)$$

En general, la diferenciación de $f(x)$ con respecto a x se puede expresar mediante

$$\frac{d(f(x))}{dx} \quad \text{o} \quad \frac{d}{dx}(f(x))$$

También se puede denotar mediante $D_x y$, o Dy, cuando no haya duda sobre cuál es la variable independiente.

Diferenciales

Los incrementos infinitamente pequeños de x e y en la expresión dy/dx se llaman *diferenciales*. Así,

$$\frac{dy}{dx}$$

representa la razón entre la diferencial de y y la diferencial de x.

En el ejemplo,

$$y = x^2$$

tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Esto se podría describir diciendo que la razón entre la diferencial de y y la diferencial de x es igual a $2x$, o que la diferencial de y es $2x$ veces mayor que la diferencial de x. Esto podría expresarse mediante la ecuación

$$dy = 2xdx$$

En esta expresión, $2x$ es *el coeficiente del diferencial de* x; de aquí el término ya mencionado de coeficiente diferencial.

No se debe aquí considerar dy/dx como una función en la que

numerador y denominador puedan separarse, sino como un límite, tal como queda indicado anteriormente.

Definición formal de derivada

Ahora se ve, por lo dicho anteriormente, que la expresión general para la derivada de una función cualquiera, $f(x)$, viene dada formalmente por

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$$

4.4. El signo de la derivada

Se ha demostrado anteriormente que la derivada de una función es igual a la pendiente de la tangente en un punto de la curva que representa la función. También se ha demostrado en el apartado 3.4 que esta pendiente puede ser positiva o negativa. Por consiguiente, la derivada puede también ser positiva o negativa. Este punto se examinará más en detalle en un capítulo posterior. Por el momento, conviene recordar las conclusiones alcanzadas en el apartado 3.4 respecto al signo de la pendiente del incremento o disminución de la función. Estas conclusiones también son aplicables a la derivada.

4.5. Derivada de una constante

Puesto que una derivada mide la velocidad de cambio de una variable, y una constante no cambia de ninguna manera, *la derivada de una constante tiene que ser cero.*

4.6. Diferenciación de $y = mx + b$

Como queda previamente dicho, ésta es una forma general de una función de primer grado. Su representación gráfica es una línea recta (Ap. 3.3) y, por tanto, tiene una pendiente constante. Esto puede

demostrarse algebraicamente a partir de principios elementales de la manera siguiente: Sea δx un incremento de x y δy el correspondiente incremento de y. Sustituyendo en

$$y = mx + b$$

$$y + \delta y = m(x + \delta x) + b$$

Restando

$$\delta y = m(\delta x)$$

Tenemos:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = m$$

Esto es cierto para cualquier valor de δx y su valor correspondiente de δy, puesto que m es una constante. Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = m$$

Obsérvese que el valor de dy/dx es independiente de b. Para diferentes valores de b, la ecuación representa una serie de líneas paralelas con pendiente m (véase Ap. 3.3).

4.7. Diferenciación de $y = x^3$

La siguiente demostración suministrará otro ejemplo del método general que se puede adoptar para hallar la derivada de una función a partir de principios elementales. Sea δx un incremento de x y δy el correspondiente incremento de y. Sustituyendo en

$$y = x^3 \quad (1)$$

$$y + \delta y = (x + \delta x)^3 = x^3 + 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3 \quad (2)$$

Restando (1) de (2):

$$\delta y = 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$$

Dividiendo por δx, que no es igual a cero, y que representa un incremento cualquiera de x:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x(\delta x) + (\delta x)^2$$

Procediendo hasta el valor límite de $\delta y/\delta x$, cuando $\delta x \to 0$, tanto $3x(\delta x)$ como $(\delta x)^2$ tenderán a cero. Esto es,

$$\lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = 3x^2 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2$$

4.8. Diferenciación de $y = x^4$

Si se aplicara el método del apartado anterior a $y = x^4$, tendríamos que desarrollar $(x + \delta x)^4$, lo que daría

$$x^4 + 4x^3(\delta x) + 6x^2(\delta x)^2 + 4x(\delta x)^3 + (\delta x)^4$$

Después de restar x^4 y dividir por δx, quedaría:

$$4x^3 + 6x^2(\delta x) + 4x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$$

Procediendo al límite cuando $\delta x \to 0$, cada uno de los términos que sigue a $4x^3$ se anula, quedando $4x^3$ como derivada de la función $y = x^4$.

Cualquier función de la forma $y = x^n$ se trata de la misma manera, siendo evidente que en el desarrollo $(x + \delta x)^n$, el segundo término nos da la derivada. Por ejemplo:

— Si $y = x^5$, $\dfrac{dy}{dx} = 5x^4$.

— Si $y = x^6$, $\dfrac{dy}{dx} = 6x^5$.

En general, si x *es un número entero positivo*, se puede deducir que

$$y = x^n \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

Veamos a continuación una demostración general de esta afirmación.

Sea $y = x^n$ y sea δx un incremento de x y δy el correspondiente incremento de y. Sustituyendo:

$$y + \delta y = (x + \delta x)^n$$

Desarrollando el segundo miembro mediante el teorema del binomio:

$$y + \delta y = x^n + nx^{n-1}(\delta x) + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x)^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\delta x)^3 + \cdots$$

Pero $y = x^n$. Restando esta expresión de la anterior:

$$\delta y = nx^{n-1}(\delta x) + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x)^2 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\delta x)^3 + \cdots$$

Dividiéndolo todo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}(\delta x)^2 + \cdots$$

Si $\delta x \to 0$, entonces cada término del segundo miembro que sigue al primero tiende a cero, luego

$$\lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = nx^{n-1}$$

o

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

La cuestión se plantea ahora acerca de los valores de n para los que este resultado es verdadero. ¿Se aplica solamente a aquellos casos en los que n es un número entero positivo? Evidentemente, la validez de ello depende de la del teorema del binomio. ¿Se cumple éste cuando n es un número negativo o fraccionario? Brevemente podemos establecer que, con ciertas restricciones numéricas, no afectan a los casos descritos antes, el teorema se cumple para todos los valores de n.

Sin embargo, la derivada de $y = x^n$ puede hallarse por otros métodos que no implican al teorema del binomio. Si se desea estudiarlos, se debe consultar un texto más avanzado sobre la materia.

La conclusión, por tanto, es que *para todos los valores de* n:

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}$$

4.9. Diferenciación de $y = ax^n$, siendo a una constante cualquiera

Resumiendo la demostración presentada en el apartado anterior, obtendremos lo siguiente:

$$y = ax^n$$

$$y + \delta y = a(x + \delta x)^n = a\left[x^n + nx^{n-1}\delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x)^2 + \cdots\right]$$

Restando una de otra:

$$\delta y = a\left[nx^{n-1}(\delta x) + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x)^2 + \cdots\right]$$

Luego

$$\frac{\delta y}{\delta x} = a\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\delta x) + \cdots\right]$$

Si

$$\delta x \to 0$$

Entonces,

$$\lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = a(nx^{n-1})$$

El factor constante a, por tanto, es un factor que siempre está en el segundo término de la ecuación y permanece como un factor de la derivada. Luego

$$\frac{dy}{dx} = nax^{n-1}$$

Ejemplos resueltos

1. Deducir, a partir de principios elementales, la derivada de

$$y = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad y = x^{-1}$$

Sea δx un incremento de x y δy el incremento correspondiente de y. Entonces,

$$y + \delta y = \frac{1}{x + \delta x}$$

Pero

$$y = \frac{1}{x}$$

Restando ésta de la anterior:

$$\delta y = \frac{1}{(x + \delta x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \delta x)}{x(x + \delta x)} = \frac{-\delta x}{x(x + \delta x)}$$

Dividiendo por δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{-1}{x^2 + x\delta x}$$

Procediendo al límite cuando $\delta x \to 0$:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{1}{x^2} \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Hallar la derivada de las funciones siguientes:

a) $y = x^8$; $\dfrac{dy}{dx} = 8x^{8-1} = 8x^7$.

b) $y = x^{1/2}$; $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}x^{1/2-1} = \dfrac{1}{2}x^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

c) $y = x^{-3}$; $\dfrac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = \dfrac{-3}{x^4}$.

d) $y = x^{1,5}$; $\dfrac{dy}{dx} = 1,5 \times x^{1,5-1} = 1,5x^{0,5}$.

e) $y = x^{-1/3}$; $\dfrac{dy}{dx} = \left(-\dfrac{1}{3}\right) \times (x^{-1/3-1}) = -\dfrac{1}{3}x^{-4/3}$.

f) $y = x$; $\dfrac{dy}{dx} = x^{1-1} = x^0 = 1$.

3. Diferenciar las funciones siguientes:

a) $y = 6x^4$; $\dfrac{dy}{dx} = 6 \times 4 \times x^{4-1} = 24x^3$.

b) $y = 4\sqrt[3]{x}$ o $y = 4x^{1/3}$.

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times \frac{1}{3} \times x^{1/3-1} = \frac{4}{3}x^{-2/3} = \frac{4}{3} \div \sqrt[3]{x^2} = \frac{4}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

c) $y = px^{2q}$; $\dfrac{dy}{dx} = p \times 2q \times x^{2q-1} = 2pqx^{2q-1}$.

d) $s = 16t^2$; $\dfrac{ds}{dt} = 2 \times 16 \times t^{2-1} = 32t$.

4. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto $x = 1$.

La pendiente viene dada por el valor de la derivada de y en el punto $x = 1$. Ahora

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

Cuando

$$x = 1 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = -1 \quad \text{o} \quad \operatorname{tg} 135°$$

EJERCICIOS

1. Hallar las derivadas de las funciones siguientes con respecto a x:

$$x^7;\ 5x;\ \frac{x}{3};\ 0{,}06x;\ \frac{1}{4}x^5;\ 15x^4;\ \frac{2x^6}{3};\ 1{,}5x^3;\ (4x)^2$$

2. Diferenciar con respecto a x:

$$bx^4;\ \frac{ax^6}{b};\ ax^p;\ x^{2a};\ 2x^{2b+1};\ 4\pi x^2$$

3. Diferenciar con respecto a x:

$$6x + 4;\ 0{,}54x - 6;\ -3x + 2;\ px + q$$

4. ¿De qué funciones de x son las siguientes derivadas:

$$x;\ 3x;\ x^2;\ \frac{1}{4}x^2;\ x^5;\ x^n;\ x^{2a};\ \frac{2}{3}x^3;\ 4ax^2?$$

5. Si $v = u + at$, siendo u y a constantes, hallar dv/dt.

6. Si $s = 1/2at^2$, siendo a una constante, hallar ds/dt cuando $a = 20$

7. Si $A = \pi r^2$, hallar dA/dr.

8. Si $V = 4/3\pi r^3$, hallar dV/dr.

9. Diferenciar las siguientes fracciones de x:

$$5\sqrt{x};\ \frac{5}{x};\ \frac{5}{\sqrt{x}};\ \sqrt[3]{x^2};\ \sqrt[4]{2x^3}$$

10. Diferenciar con respecto a x:

$$x^{0,4};\ 8x^{0,2};\ \frac{8}{x^{0,2}};\ 6x^{-4};\ x^{-p}$$

11. Diferenciar con respecto a x:

$$6x^{3,2};\ 2x^{-1,5};\ 29x^{0,7};\ \frac{6}{\sqrt[5]{x^3}}$$

12. Si $p = 20/v^2$, hallar dp/dv.

13. Hallar la pendiente de la curva $y = 1/4x^2$ en el punto de la curva $x = 3$. ¿Para qué valor de x es la pendiente de la curva igual a cero?

14. Hallar la pendiente de la curva $y = 2x^3$, en el punto $x = 2$.

15. Hallar las pendientes de la curva $y = 2/x$ en los puntos $x = 10$, 2, 1, 1/2.

16. Hallar, a partir de principios elementales, la pendiente de $y = 1/x^2$.

17. ¿En qué punto de la curva de x^2 la pendiente de la curva es igual a 2?

18. ¿En qué punto de la curva de $y = x^3$ la tangente a la curva forma un ángulo de 45° con el eje OX?

19. ¿En qué punto de la curva de $y = \sqrt{x}$ la pendiente es igual a 2?

20. Se pretende trazar una tangente a la curva $y = 0{,}5x^2$ que sea paralela a la recta $2x - 4y = 3$. ¿En qué punto de la curva debe ser trazada?

5 Algunas reglas para diferenciar/derivar

5.1. Diferenciación de una suma

Las funciones que se diferenciaron en el capítulo anterior eran expresiones de *un término* solamente, a excepción de $y = mx + b$ (véase Ap. 4.6). Los cálculos se realizaron a partir de principios elementales.

Ahora vamos a considerar, en general, la diferenciación de una función suma de dos o más funciones de la misma variable, como $y = 5x^3 + 14x^2 - 7x$. La demostración que presentamos a continuación es una demostración general para la suma de un número cualquiera de funciones de la misma variable.

Sean u y v funciones de x, e y su suma, de modo que

$$y = u + v$$

Supongamos que x se incrementa en δx. Entonces, u, v e y, que son funciones de x, tendrán los incrementos correspondientes.

Sean estos incrementos δu, δv y δy, de modo que

u se convierte en $u + \delta u$

v se convierte en $v + \delta v$

y se convierte en $y + \delta y$

Por tanto, a partir de $y = u + v$, tenemos: $y + \delta y = (u + \delta u) + (v + \delta v)$.

Restando:

$$\delta y = \delta u + \delta y$$

Dividiendo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x}$$

Esto es cierto para todos los valores de δx y los incrementos correspondientes δu, δv y δy.

También sus límites son iguales (Teorema 1, Límites, Ap. 2.8). Luego, si

$$\delta x \to 0$$

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta x} \right) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right) + \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta v}{\delta x} \right)$$

Sustituyendo estas expresiones por los símbolos correspondientes de las derivadas

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Claramente el teorema se cumplirá para cualquier número de funciones. De ahí, la regla de la diferenciación de una suma:

La derivada de la suma de varias funciones es igual a la suma de las derivadas de dichas funciones.

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar respecto a x:

$$y = 3x^3 + 7x^2 - 9x + 20$$

Utilizando la regla anterior:

$$\frac{dy}{dx} = 9x^2 + 14x - 9$$

2. Hallar la pendiente en el punto de la curva $y = x^2 - 4x + 3$ para $x = 3$. ¿Cuál es el punto de pendiente cero en esa curva?

Si

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

Luego cuando $x = 3$,

$$\frac{dy}{dx} = (2 \times 3) - 4 = 2$$

Cuando la pendiente es cero

$$2x - 4 = 0$$
$$x = 2$$

3. Si $s = 80t - 16t^2$, hallar $\frac{ds}{dt}$. Cuando $\frac{ds}{dt} = 16$, hallar t.

$$s = 80t - 16t^2$$

Luego

$$\frac{ds}{dt} = 80 - 32t$$

Para $\frac{ds}{dt} = 16$,

$$80 - 32t = 16$$
$$32t = 64$$
$$t = 2$$

5.2. Diferenciación de un producto

La derivada de algunos productos como $(x + 2)^3$ o $3x(x + 2)$ puede hallarse multiplicando y utilizando la regla de diferenciación de una suma. En la mayoría de los casos, sin embargo, eso no se puede hacer, como, por ejemplo, $x^2\sqrt{1 - x}$ y $x^3 \operatorname{sen} x$. La derivada de un producto no es igual al producto de las derivadas de los factores, como se puede comprobar en un ejemplo como $3x(x + 2)$.

Una regla general de uso en todos los casos se puede hallar como sigue: Sean u y v funciones de x, y sea

$$y = uv$$

Por tanto, y es también una función x.

Sea δx un incremento de x, y δu, δv y δy los incrementos correspondientes de u, v e y. Sustituyendo los nuevos valores de u, v e y en

$$y = uv \quad (1)$$

$$y + \delta y = (u + \delta u)(v + \delta v)$$

o

$$y + \delta y = uv + u(\delta v) + v(\delta u) + (\delta u)(\delta v)$$

Restando (1) a esta expresión:

$$\delta y = u(\delta v) + v(\delta u) + (\delta u)(\delta v)$$

Dividiendo por δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = u\frac{\delta v}{\delta x} + v\frac{\delta u}{\delta x} + \delta u\frac{\delta v}{\delta x}$$

Sea $\delta x \to 0$. Entonces, δu, δv, δy tenderán a cero. Por tanto, según vimos en el capítulo 2,

$$\lim_{\delta x \to 0}\frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0}\left(u\frac{\delta v}{\delta x}\right) + \lim_{\delta x \to 0}\left(v\frac{\delta u}{\delta x}\right) + \lim_{\delta x \to 0}\left(\delta u\frac{\delta v}{\delta x}\right)$$

En el límite, puesto que $\delta u \to 0$, el último término, esto es, $\delta u \frac{\delta y}{\delta x}$, también tenderá a cero. Luego, con la notación usual:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Esta importante regla se puede expresar como sigue:

1. *Diferenciar por orden cada factor y multiplicarlo por el otro factor.*
2. *La suma de los productos es* $\frac{dy}{dx}$

Esta regla puede ampliarse a más de dos factores. Así, si

$$y = uvw$$

siendo u, v y w funciones de x, tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{du}{dx}\cdot vw\right) + \left(\frac{dv}{dx}\cdot uw\right) + \left(\frac{dw}{dx}\cdot uv\right)$$

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $(x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 7)$.

Sea

$$y = (x^2 - 5x + 2)(2x^2 + 7)$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d(x^2 - 5x + 2)}{dx}\cdot(2x^2 + 7)\right] + \left[\frac{d(2x^2 + 7)}{dx}\cdot(x^2 - 5x + 2)\right] =$$

$$= (2x - 5)(2x^2 + 7) + 4x(x^2 - 5x + 2)$$

Este resultado puede simplificarse, si fuese necesario.

2. Diferenciar $(x^2 - 1)(2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{d(x^2 - 1)}{dx} \cdot (2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1)\right] +$$

$$+ \left[\frac{d(2x + 1)}{dx} \cdot (x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + 1)\right] +$$

$$+ \left[\frac{d(x^3 + 2x^2 + 1)}{dx} \cdot (x^2 - 1)(2x + 1)\right] =$$

$$= 2x(2x + 1)(x^3 + 2x^2 + 1) + 2(x^2 - 1)(x^3 + 2x^2 + 1) +$$

$$+ (3x^2 + 4x)(x^2 - 1)(2x + 1)$$

Este resultado se puede simplificar aún más.

5.3. Diferenciación de un cociente

En el apartado 4.9 se halló la derivada de un ejemplo simple de un cociente, a partir de principios elementales. Este método, sin embargo, puede resultar engorroso y tedioso en ejemplos más complicados. La regla general que se explica a continuación es la que se emplea ordinariamente.

Sean u y v funciones de x, y sea

$$y = \frac{u}{v}$$

Entonces, y es una función de x.

Utilizando la notación empleada en el apartado anterior para los incrementos de estas funciones

$$y + \delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v}$$

Restando

$$\delta y = \frac{u + \delta u}{v + \delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v(u + \delta u) - u(v + \delta v)}{v(v + \delta v)} = \frac{v\delta u - u\delta v}{v(v + \delta v)}$$

Dividiendo por δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{v\frac{\delta u}{\delta x} - u\frac{\delta v}{\delta x}}{v(v + \delta v)}$$

Sea $\delta x \to 0$; en consecuencia, δu, δv y δy tienden a cero. Entonce

$$\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta y}{\delta x}\right) = \frac{\lim\limits_{\delta x \to 0}\left(v\frac{\delta u}{\delta x}\right) - \lim\limits_{\delta x \to 0}\left(u\frac{\delta v}{\delta x}\right)}{\lim\limits_{\delta x \to 0} v(v + \delta v)} \quad \text{(Teorema 4, Límites.)}$$

Los límites en el numerador se pueden expresar por

$$v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}$$

y el límite del denominador es v^2, puesto que $\delta v \to 0$. Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Esto se puede escribir

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\text{den.} \times \text{derivada num.}) - (\text{num.} \times \text{derivada den.})}{(\text{den.})^2}$$

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $\dfrac{3x}{x-1}$.

Utilizando

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

donde $u = 3x$ y $v = x - 1$,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[(x-1)(3)]-[3x(1)]}{(x-1)^2}=\frac{3x-3-3x}{(x-1)^2}=\frac{-3}{(x-1)^2}$$

2. Diferenciar $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$.

Utilizando la fórmula anterior

$$\frac{dy}{dx}=\frac{[(x^3-1)\cdot(3x^2)]-[(x^3+1)\cdot(3x^2)]}{(x^3-1)^2}=$$

$$=\frac{3x^5-3x^2-3x^5-3x^2}{(x^3-1)^2}=\frac{-6x^2}{(x^3-1)^2}$$

3. Diferenciar $\dfrac{x(x+1)}{x^2-3x+2}$.

Tenemos

$$y=\frac{x^2+x}{x^2-3x+2}$$

Utilizando la regla anterior:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[(x^2 - 3x + 2)(2x + 1)] - [(x^2 + x)(2x - 3)]}{(x^2 - 3x + 2)^2} =$$

$$= \frac{(2x^3 - 5x^2 + x + 2) - (2x^3 - x^2 - 3x)}{(x^2 - 3x + 2)^2} = \frac{-4x^2 + 4x + 2}{(x^2 - 3x + 2)^2}$$

5.4. Función de función

Para entender el significado de la expresión *función de función*, consideremos la función trigonométrica $\operatorname{sen}^2 x$, esto es, $(\operatorname{sen} x)^2$. Esta función, cuadrado del $\operatorname{sen} x$, es una función de $\operatorname{sen} x$, de la misma manera que x^2 es una función de x, o u^2 es una función de u.

Pero $\operatorname{sen} x$ es ella misma una función de x, luego $\operatorname{sen}^2 x$ es una función de $\operatorname{sen} x$, la cual es una función de x, esto es, $\operatorname{sen}^2 x$ es una función de una función de x.

Similarmente, $\sqrt{x^2 + 4x}$ es una función de $x^2 + 4x$, de la misma manera que $\sqrt{x}$ es una función de x. Pero $x^2 + 4x$ es ella misma una función de x, luego $\sqrt{x^2 + 4x}$ es una función de $x^2 + 4x$, que es una función de x.

La idea de «función de función» puede ampliarse. Por ejemplo, hemos visto que $\operatorname{sen}^2 x$ es una función de una función de x. Pero $\operatorname{sen}^2(\sqrt{x})$ es una función de $\operatorname{sen}\sqrt{x}$, que es una función de $\sqrt{x}$ que, a su vez, es una función de x. La idea de «función de función» con frecuencia choca a los principiantes, y hay quien muestra una cierta tendencia a pasarla por alto y a omitir la aplicación de la regla de su diferenciación que veremos más adelante. Por ejemplo, puede pasarse por alto que una función tan familiar como $\operatorname{sen} 2x$ es una función de función, ya que $2x$ es una función de x.

No podemos avanzar más en el ejemplo anterior de $\operatorname{sen}^2 x$, ya que las reglas de diferenciación de las funciones trigonométricas se tratan en un capítulo posterior.

Utilizaremos una función algebraica, por ejemplo, $y = (x^2 - 5)^4$, para descubrir la regla de diferenciación de una función de función.

Así, $(x^2 - 5)^4$ es una función —la cuarta potencia— de $x^2 + 5$, ella misma una función de x. Si

$$u = x^2 - 5$$

podemos escribir

$$y = u^4$$

Diferenciando y con respecto a u, según la regla dada

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

Pero necesitamos llegar a $\frac{dy}{dx}$; por tanto, adoptamos el siguiente método para hallar este cociente:

Sea δx un incremento de x, δu el incremento correspondiente de u y δy el incremento correspondiente de y.

Siendo estos incrementos finitos, es obvio que por la ley de las fracciones

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x}$$

Sea $\delta x \to 0$; en consecuencia, δu y δy tenderán a cero. Entonces, cada una de las razones

$$\frac{\delta y}{\delta x}, \quad \frac{\delta y}{\delta u}, \quad \frac{\delta u}{\delta x}$$

tenderá a un límite. Por tanto,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \cdot \frac{\delta u}{\delta x} \right) = \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta y}{\delta u} \right) \cdot \lim_{\delta x \to 0} \left(\frac{\delta u}{\delta x} \right)$$

por la tercera ley de los límites (Ap. 2.8). Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Aplicando este resultado a lo anterior, tenemos:

$$\frac{dy}{du} = 4u^3$$

Y como

$$u = x^2 - 5$$

será

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

Y puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

tendremos

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot 2x$$

Esto es,

$$\frac{dy}{dx} = 4(x^2 - 5)^3 \cdot 2x = 8x(x^2 - 5)^3$$

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $y = \sqrt{1 - x^2}$.

$$\sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2}$$

Sea $u = 1 - x^2$. Entonces,

$$\frac{du}{dx} = -2x \quad \text{y} \quad y = u^{1/2}$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2}$$

Puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

sustituyendo,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) =$$

$$= -x(1 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

2. Diferenciar $y = (x^2 - 3x + 5)^3$.

Sea

$$u = x^2 - 3x + 5$$

Entonces,

$$\frac{du}{dx} = 2x - 3$$

y

$$y = u^3$$

Luego

$$\frac{dy}{du} = 3u^2 = 3(x^2 - 3x + 5)^2$$

Sustituyendo en

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3(x^2 - 3x + 5)^2 \cdot (2x - 3) = 3(2x - 3)(x^2 - 3x + 5)^2$$

Tras alguna práctica, probablemente se pueda prescindir, por lo general, de la u y escribir directamente el resultado. El ejemplo anterior es una forma práctica conveniente de seguir este procedimiento.

3. Diferenciar $(3x^2 - 5x + 4)^{3/2}$.

Resolviendo sin utilizar la u, podemos escribir la solución en dos pasos, de la forma siguiente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(3x^2 - 5x + 4)^{(3/2)-1} \cdot [\text{der. de } (3x^2 - 5x + 4)]$$

$$= \frac{3}{2}(3x^2 - 5x + 4)^{1/2} \cdot (6x - 5)$$

4. Diferenciar $y = (x^2 + 5)\sqrt[3]{x^2 + 1}$.

Al ser esta función un producto de dos funciones, se emplea la regla

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

De ahí que

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 5) \cdot (\text{der. de} \sqrt[3]{x^2 + 1}) + \sqrt[3]{x^2 + 1} \cdot [\text{der. de } (x^2 + 5)] \quad (1)$$

De éstas, $\sqrt[3]{x^2+1}$ es una función de función.
Es mejor resolverla por separado y sustituir a continuación

$$\frac{d[(x^2+1)^{1/3}]}{dx} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{(1/3)-1} \cdot [\text{derivada de } (x^2+1)] =$$

$$= \frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3} \cdot 2x = \frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{dy}{dx} = (x^2+5)\left[\frac{2x}{3(x^2+1)^{2/3}}\right] + (\sqrt[3]{x^2+1} \cdot 2x) =$$

$$= \frac{2x(x^2+5)}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}} + 2x\sqrt[3]{x^2+1}$$

El cálculo puede simplificarse aún más.

5. Diferenciar $\dfrac{\sqrt{1+3x}}{4x}$.

Empleando la fórmula de diferenciación de un cociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

y sustituyendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x \cdot (\text{der. de } \sqrt{1+3x}) - (\sqrt{1+3x} \cdot \text{der. de } 4x)}{(4x)^2} \quad (1)$$

De éstas, $\sqrt{1+3x}$ o $(1+3x)^{1/2}$ es una función de función.
Aplicando el método anterior

$$\frac{d}{dx}(1+3x)^{1/2} = \frac{1}{2}(1+3x)^{-1/2} \cdot 3 = \frac{3}{2\sqrt{1+3x}}$$

Sustituyendo en (1):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x\cdot\dfrac{3}{2\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2} = \frac{\dfrac{6x}{\sqrt{1+3x}} - 4\sqrt{1+3x}}{16x^2} =$$

$$= \frac{6x - 4(1+3x)}{16x^2\sqrt{1+3x}} = \frac{6x - 4 - 12x}{16x^2\sqrt{1+3x}} = \frac{-4-6x}{16x^2\sqrt{1+3x}} =$$

$$= -\frac{2+3x}{8x^2\sqrt{1+3x}}$$

5.5. Diferenciación de funciones implícitas

En el apartado 1.11 se indicó que, con frecuencia, cuando y es una función de x, la relación entre x e y no se expresa explícitamente, sino que las dos variables se presentan en forma de una ecuación a partir de la cual y puede obtenerse en términos de x, aunque a veces esto no es posible. Aun cuando y se pueda hallar en términos de x, en esa forma la diferenciación puede ser engorrosa o difícil. Esto se ve muy bien en los ejemplos de las funciones implícitas que se dieron en el apartado 1.11.

En estos casos el método que se sigue consiste en diferenciar término a término toda la ecuación, recordando que al diferenciar funciones de y hay que diferenciar una función de función.

Ejemplos resueltos

1. Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de la ecuación

$$x^2 - y^2 + 3x = 5y$$

Diferenciando,

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} + 3 = 5\frac{dy}{dx}$$

Dejemos la derivada $\frac{dy}{dx}$, ya que aún no la hemos determinado. Se verá, sin embargo, que la ecuación se puede resolver para $\frac{dy}{dx}$.

Así, agrupando términos similares,

$$2y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

o

$$\frac{dy}{dx}(2y + 5) = 2x + 3$$

tendremos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3}{2y + 5}$$

Se observará que la solución nos da $\frac{dy}{dx}$ en términos de las dos variables x e y. Cuando se conocen los valores correspondientes de x e y, se puede determinar el valor de $\frac{dy}{dx}$. Presentamos a continuación un ejemplo.

2. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $x^2 + xy + y^2 = 4$ en el punto $(2, -2)$.

Diferenciando $x^2 + xy + y^2 = 4$ como hemos indicado antes, y recordando que xy es un producto, tenemos:

$$2x + y + x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -(2x + y)$$

y

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}$$

Luego, cuando $x = 2$, $y = -2$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4 - 2}{2 - 4} = 1$$

Por tanto, la pendiente de la tangente a la curva en este punto es 1 y el ángulo de la tangente con OX es 45°.

5.6. Diferenciación sucesiva

Se indicó en el apartado 4.2 que la derivada de una función de x, si no era una función lineal, era una función de x.

Por ejemplo, si

$$y = 3x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3$$

Puesto que $12x^3$ es una función de x, puede ser diferenciada con respecto a x:

$$\frac{d}{dx}(12x^3) = 36x^2$$

Esta expresión se denomina el segundo coeficiente diferencial o *derivada segunda de la función original*, y la operación se puede indicar por

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Se emplea el símbolo $\frac{d^2y}{dx^2}$ para representar la derivada segunda. En este símbolo, el número «2» en el numerador y en el denominador no es un exponente, sino que indica que y, la función original, ha sido diferenciada dos veces respecto a x.

Así, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ mide la velocidad a la que cambia $\dfrac{dy}{dx}$ con respecto a x, de la misma manera que $\dfrac{dy}{dx}$ mide la velocidad a la que cambia y con respecto a x.

La derivada segunda es también una función de x, a menos que sea una función lineal o una constante. Por consiguiente, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ puede también ser diferenciada con respecto a x, y el resultado es la derivada tercera de y con respecto a x.

Se representa por $\dfrac{d^3y}{dx^3}$.

Así, en el ejemplo anterior:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 36x^2$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 72x$$

Por tanto, es posible tener una sucesión de derivadas de orden creciente. Este proceso de diferenciación sucesiva se puede continuar indefinidamente, o hasta que una de las derivadas sea una constante. Esto puede ilustrarse con el ejemplo de $y = x^n$, de la manera siguiente:

Derivadas sucesivas de x^n

$$y = x^n$$

$$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$

Si n es un número entero positivo, este proceso puede continuarse hasta que finalmente se alcance $n - n$ y el exponente de x y el coeficiente diferencial se hace $n(n-1)(n-2)$... 3, 2, 1; esto es, el *factorial de n*, o $n!$. Las derivadas siguiente y subsiguientes son cero.

Si n no es un número entero positivo el proceso puede continuarse indefinidamente. El siguiente ejemplo servirá de ilustración.

Hallar las derivadas sucesivas de

$$y = x^3 - 7x^2 + 6x + 3$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 14x + 6$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 14$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 0$$

5.7. Notación alternativa para la derivada

Recordar que las derivadas sucesivas se llaman también coeficientes diferenciales o funciones derivadas de la función original. Se pueden también denotar por los símbolos alternativos siguientes:

1. Cuando se emplea la notación de *función*:

   — $f(x)$ o $\phi(x)$ denota una función de x.

   — $f'(x)$ o $\phi'(x)$ denota la derivada primera o 1.er coeficiente diferencial.

   — $f''(x)$ o $\phi''(x)$ denota la derivada segunda o 2.º coeficiente diferencial.

— $f'''(x)$ o $\phi'''(x)$ denota la derivada tercera o 3.er coeficiente diferencial.
— $f^{iv}(x)$ o $\phi^{iv}(x)$ denota la derivada cuarta o 4.° coeficiente diferencial.

2. O bien se puede mantener y con comillas o, a veces, con acentos o subíndices. Así, si y denota una función:

— y' o y_1 denota la *primera* derivada.
— y'' o y_2 denota la *segunda* derivada.
— y''' o y_3 denota la *tercera* derivada.

O, a veces, se utilizan los términos y_1, y_2, y_3, etc.

5.8. Curvas derivadas

Anteriormente, se ha indicado que la diferenciación sucesiva de una función de x produce un conjunto de derivadas, cada una de las cuales es también una función de x. Estas derivadas se pueden representar gráficamente. Por consiguiente, las funciones derivadas dan lugar a una serie de *curvas derivadas* entre las que existen relaciones definidas.

Considérese la función

$$y = x^2 - 4x + 3$$

Entonces,

$$y' = 2x - 4$$

y

$$y'' = 2$$

La figura 5.1 representa: 1) la curva correspondiente a $y = x^2 - 4x + 3$; 2) las rectas correspondientes a $y' = 2x - 4$, y 3) $y'' = 2$, las dos funciones derivadas. Las siguientes relaciones entre la curva de la función original y las rectas de sus dos derivadas son obvias.

1. Puesto que y', la derivada primera de la función, nos da la velocidad del incremento de y con respecto a x, su valor para

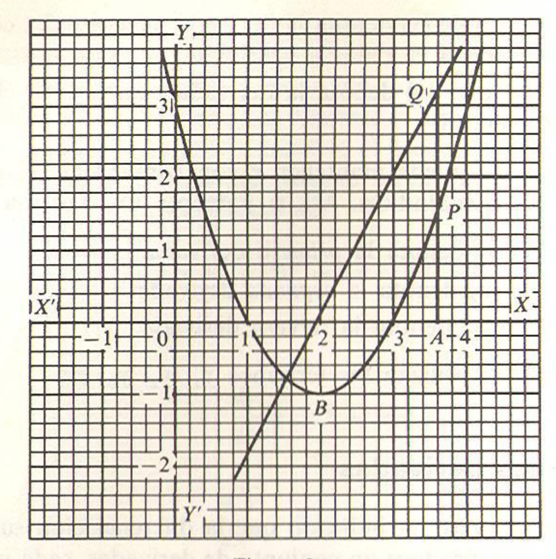


Figura 5.1.

cualquier valor dado de x es igual a la pendiente en el punto correspondiente de la curva.

Tómese un punto A sobre el eje OX con $x = 3{,}6$. Trazando la ordenada en A, P es el punto correspondiente de la curva, Q el punto de la recta $y' = 2x - 4$, la primera derivada de la función.

Entonces, el valor de la ordenada QA es igual a la pendiente de la curva en P. Se observa que este valor es 3,2 unidades. Sustituyendo $x = 3{,}6$ en $y'' = 2x - 4$, obtenemos la derivada igual a $(2 \cdot 3{,}6) - 4 = 3{,}2$.

2. La recta correspondiente a la derivada segunda de la función, esto es, $y'' = 2$, al ser paralela al eje OX y tener un valor constante para todo valor de ordenada, indica que la pendiente de $y' = 2x - 4$ es constante, a saber, 2.
3. En el punto B, el más bajo de la curva de $y = x^2 - 4x + 3$, el valor de la ordenada en el punto correspondiente de la primera derivada de la curva, $y' = 2x - 4$, es 0; éste corta a OX en este punto. Así, la pendiente de la función original es 0 cuando $x = 2$. Una tangente trazada a la curva por B será paralela al eje OX.

4. Para valores de x menores de 2, la función $x^2 - 4x + 3$ es decreciente, y los valores de la función derivada son negativos. Para valores mayores de 2, $x^2 - 4x + 3$ es creciente y la función derivada $2x - 4$ es positiva.

EJERCICIOS

Diferenciar las funciones siguientes de x:

1. $6x^2 + 5x$. **2.** $3x^3 + x - 1$. **3.** $4x^4 + 3x^2 - x$.

4. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{7}x + \frac{1}{4}$. **5.** $\frac{5}{x} + 4x$. **6.** $7 + \frac{4}{x} - \frac{2}{x^2}$.

7. $x(5 - x + 3x^2)$. **8.** $8\sqrt{x} + \sqrt{10}$.

Hallar $\frac{ds}{dt}$ cuando

9. $s = ut + \frac{1}{2}at^2$. **10.** $s = 5t + 16t^2$. **11.** $s = 3t^2 - 4t + 7$.

12. Hallar $\frac{dy}{dx}$ cuando $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

13. Diferenciar con respecto a x, $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$.

14. Diferenciar con respecto a x, $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

15. Diferenciar con respecto a x, $(1 + x)^3$.

16. Si $y = x^{2n} - nx^2 + 5n$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

17. Hallar $\frac{dy}{dx}$ cuando $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \frac{2}{x}$.

18. Hallar la pendiente de la curva $y = 2x^2 - 3x + 1$, en el punto $x = 1{,}5$. ¿Para qué valor de x tendrá la curva una pendiente cero?

19. ¿Para qué valores de x tendrá la curva de $y = x(x^2 - 12)$ una pendiente cero?

20. ¿Cuáles son las pendientes de la curva $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ cuando x tiene los valores 1, 2 y 3?

21. ¿Cuáles son los puntos de pendiente cero en la curva $y = x + \frac{1}{x}$?

Diferenciar los siguientes productos mediante la regla de diferenciación de un producto:

22. $(3x + 1)(2x + 1)$. **23.** $(x^2 + 1)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

24. $(3x - 5)(x^2 + 2x)$. **25.** $(x^2 + 3)(2x^2 - 1)$.

26. $(x^2 + 4x)(3x^2 - x)$. **27.** $(x^2 + x + 1)(x - 1)$.

28. $(x^2 - x + 1)(x + 1)$. **29.** $(x^2 + 4x + 5)(x^2 - 2)$.

30. $(x^2 - 5)(x^2 + 5)$. **31.** $(x^2 - x + 1)(x^2 + x - 1)$.

32. $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$. **33.** $(2x^2 - 3)(3x^2 + x - 1)$.

34. $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. **35.** $(x + 1)(2x + 1)(3x + 2)$.

36. $(ax^2 + bx + c)(px + q)$. **37.** $\sqrt{x}(2x - 1)(x^2 + x + 1)$.

38. $2x^{3/2}(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1)$.

Diferenciar las siguientes funciones de x:

39. $\dfrac{3}{2x-1}$. **40.** $\dfrac{1}{1-3x^2}$.

41. $\dfrac{x}{x+2}$. **42.** $\dfrac{x+1}{x+2}$. **43.** $\dfrac{3x-1}{2x+3}$.

44. $\dfrac{x+b}{x-b}$. **45.** $\dfrac{x-b}{x+b}$. **46.** $\dfrac{x^2}{x-4}$.

47. $\dfrac{x^2}{x^2-4}$. **48.** $\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$. **49.** $\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$.

50. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$. **51.** $\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$. **52.** $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

53. $\dfrac{2x^2-x+1}{3x^2+x-1}$. **54.** $\dfrac{1+x+x^2}{x}$. **55.** $\dfrac{2x^4}{a^2-x^2}$.

56. $\dfrac{2x-3}{2-3x}$. **57.** $\dfrac{x(x-1)}{x-2}$. **58.** $\dfrac{x^{1/2}+2}{x^{3/2}}$.

59. $(2x+5)^2$; $(1-5x)^4$; $(3x+7)^{1/3}$.

60. $\dfrac{1}{1-2x}$; $(1-2x)^2$; $\sqrt{1-2x}$.

61. $(x^2-4)^5$; $(1-x^2)^{3/2}$; $\sqrt{3x^2-7}$.

62. $\dfrac{1}{1-2x^2}$; $\sqrt{1-2x^2}$; $x\sqrt{1-x^2}$.

63. $\dfrac{1}{4-x}$; $\dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$; $\dfrac{1}{(4-x)^2}$.

64. $\dfrac{1}{x^2 - 1}$; $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$; $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

65. $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; $\sqrt{\left(\dfrac{x}{1 - x}\right)}$; $\sqrt{\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)}$.

66. $x\sqrt{\left(\dfrac{1 - x}{1 + x}\right)}$; $\sqrt[3]{x^2 + 1}$. **67.** $\sqrt{a^2 + x^2}$; $\dfrac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}$.

68. $\sqrt{1 - x + x^2}$; $(1 - 2x^2)^n$. **69.** $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; $\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2$.

70. $\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^3}}$; $\dfrac{\sqrt{1 + 2x}}{x}$. **71.** $\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; $\dfrac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$.

72. $\dfrac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 4}}$; $x^2\sqrt{1 - x}$. **73.** $\dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{1 - x}$; $x\sqrt{2x + 3}$.

Hallar $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de las siguientes funciones implícitas:.

74. $3x^2 + 7xy + 9y^2 = 6$. **75.** $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$.

76. $x^3 + y^3 = 3xy$. **77.** $x^n + y^n = a^n$.

78. Hallar la pendiente de la tangente a la curva $x^2 + y^2 - 3x + 4y - 3 = 0$ en el punto (1,1).

Hallar las derivadas primera, segunda y tercera de las siguientes funciones de x:.

79. $x^2(x - 1)$. **80.** x^{2b}. **81.** $5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1$.

82. $10x^5 - 4x^3 + 5x - 2$. **83.** $\dfrac{1}{x}$. **84.** $\sqrt{x}$.

85. $\sqrt{2x+1}$. **86.** $\frac{1}{x^2}$.

87. Hallar la derivada n-ésima de $\frac{1}{a^2 - x^2}$.

$$\left[\text{Pista: } \frac{1}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)a.\right]$$

88. Si $f(x) = 6x^2 - 5x + 3$, hallar $f'(0)$. ¿Para qué valor de x será $f'(x) = 0$? ¿A qué punto de la curva $f(x)$ corresponderá ese valor?

89. Si $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7$, hallar $f'(1)$ y $f''(2)$. ¿A qué valores de x se hará cero $f'(x)$?

90. Hallar los valores de x para los que la curva de $f(x) = (1/3)x^3 - (5/2)x^2 + 6x + 1$ tendrá una pendiente cero. ¿Para qué valor de x será la pendiente de $f'(x)$ igual a cero? ¿A qué valor de $f'(x)$ corresponderá?

6 Valores máximos y mínimos. Puntos de inflexión

6.1. Signo de la derivada

Debemos ahora examinar con más detalle el signo de la derivada, al que hemos aludido brevemente en los apartados 4.4 y 5.8.

Si y es una función continua de x, y si x se incrementa en una cantidad δx, entonces y aumentará o disminuirá en una cantidad finita δy.

Si y aumenta, entonces δy debe ser positivo, y como δx es siempre positivo, la tasa de variación se expresa como el límite de $\frac{\delta y}{\delta x}$, esto es, $\frac{dy}{dx}$ debe ser positivo.

Si, sin embargo, y disminuye, δy se debe considerar negativo. De ahí que la tasa de variación, expresada como el límite de $\frac{\delta y}{\delta x}$, deba ser también negativa, esto es, $\frac{dy}{dx}$ debe ser negativo.

Más concisamente:

1. *Si* y *aumenta cuando* x *aumenta,* $\frac{dy}{dx}$ *es positivo.*

2. *Si* y *disminuye cuando* x *aumenta,* $\frac{dy}{dx}$ *es negativo.*

Se alcanzaron conclusiones similares en relación con la pendiente de una curva en un punto. Puesto que las funciones algebraicas se

pueden representar gráficamente, la forma de la curva, tal como se indica a continuación, indicará si la función es creciente o decreciente, y, consiguientemente, si la derivada es positiva o negativa.

En las figuras 6.1*a* y *b* se muestran porciones de curvas de funciones crecientes, en las que P es un punto de la curva y Q el punto correspondiente a un incremento δx de x.

1. Las curvas pueden ser *cóncavas hacia arriba y crecientes*, como en la figura 6.1*a*.
   Ejemplos: $y = x^2$ (para valores positivos de x); $y = 10^x$; $y = \operatorname{tg} x$ (entre 0 y $\pi/2$)
2. O pueden ser *cóncavas hacia abajo y crecientes*, como en la figura 6.1*b*.
   Ejemplos: $y = \sqrt{x}$; $y = \log x$; $Y = \operatorname{sen} x$ (entre 0 y $\pi/2$).

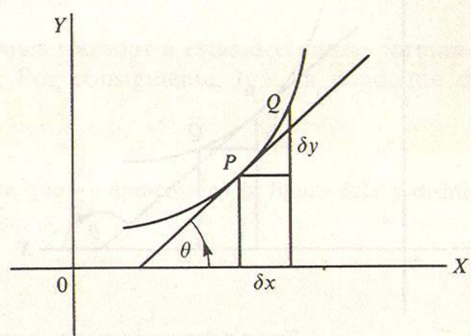


Figura 6.1*a*.

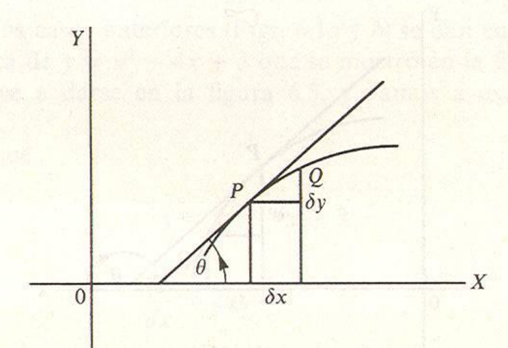


Figura 6.1*b*.

En las dos clases, la curva aumenta hacia la derecha al aumentar x. Como es evidente por las figuras, al aumentar x en δx, y aumenta en δy.

Por tanto, $\frac{\delta y}{\delta x}$ y sus límites son positivos.

Geométricamente, es evidente que en los dos casos la tangente a la curva en P forma un ángulo *agudo* con OX. De ahí que la pendiente, dada por $\operatorname{tg}\theta$ sea positiva. También es evidente que en la figura 6.1*a* $\frac{dy}{dx}$ aumenta, y en la figura 6.1*b* disminuye.

Las funciones crecientes se pueden representar similarmente por porciones de sus curvas en las figuras 6.2*a* y *b*.

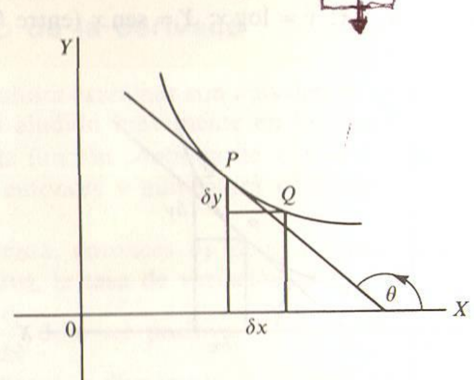


Figura 6.2*a*.

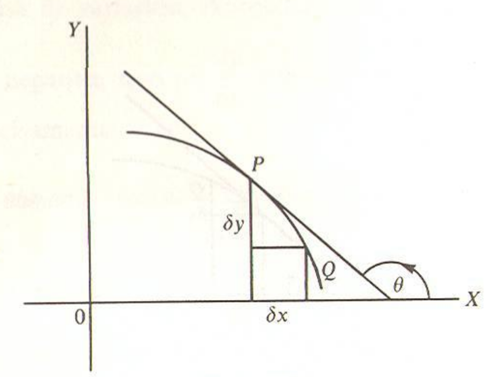


Figura 6.2*b*.

Utilizando las mismas letras y notación que en la figura 6.1, es evidente que en ambos casos, cuando x en el punto P aumenta en δx, el nuevo valor de la función en x es menor. De ahí que δy deba ser considerado negativo y $\frac{\delta y}{\delta x}$, y su límite $\frac{dy}{dx}$, sean negativos.

Como antes, hay dos tipos de curva:

1. *La curva cóncava hacia arriba decreciente* como en la figura 6.2*a*.
   Ejemplos: $y = x^2$ (para valores negativos de x); $y = 1/x$; $y = \operatorname{ctg} x$ (entre 0 y $\pi/2$), etc.
2. *La curva cóncava hacia abajo decreciente* como en la figura 6.2*b*.
   Ejemplos: $y = \operatorname{sen} x$ (entre $\pi/2$ y π); $y = -x^2$ (para valores positivos de x), etc.

Las tangentes trazadas a estas dos curvas forman ángulos obtusos con OX. Por consiguiente, $\operatorname{tg}\theta$, la pendiente de la curva es negativa.

[Es evidente que $\frac{dy}{dx}$ aumenta en la figura 6.2*a* y disminuye en la figura 6.2*b*.]

6.2. Valores estacionarios

Dos de los casos anteriores (Figs. 6.1*a* y *b*) se dan en la representación gráfica de $y = x^2 - 4x + 3$ que se mostró en la figura 5.1. Lo mismo vuelve a darse en la figura 6.3, y vamos a examinarlo en detalle.

Puesto que

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 4$$

Esto último se representa en la figura 6.4 mediante la recta AB.

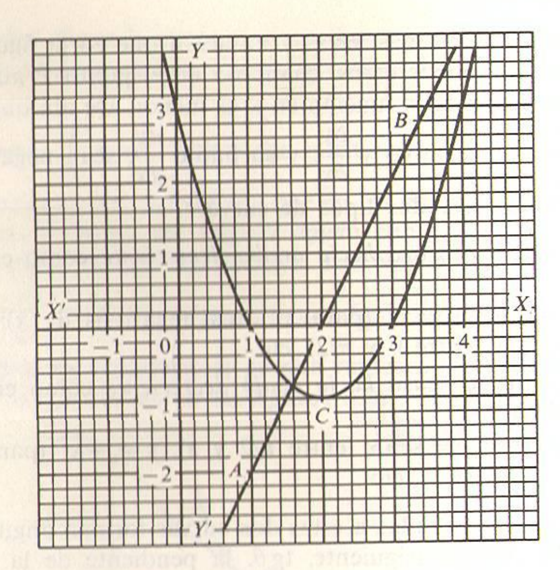


Figura 6.3.

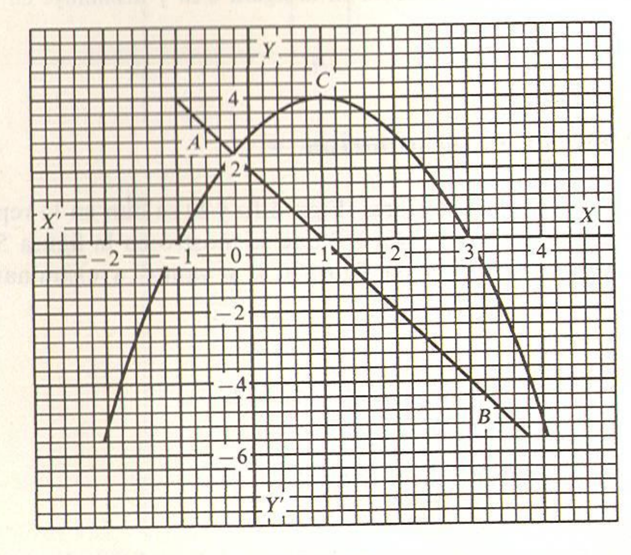


Figura 6.4.

A partir de la gráfica, se pueden observar los cambios siguientes en la curva y en la función:

1. Al aumentar x de $-\infty$ a $+2$, y disminuye. Los valores de $\frac{dy}{dx}$ (representados por la recta AB) son negativos (Fig. 6.2*a*).
2. Al aumentar x de $+2$ a $+\infty$, y aumenta (Fig. 6.2*a*). De ahí que los valores de $\frac{dy}{dx}$ sean positivos.
3. En C la curva deja de disminuir y empieza a aumentar. Así, cuando $x = 2$, el valor de y no cambia momentáneamente, sino que es un valor estacionario. Por tanto, no hay en ese punto ninguna tasa de variación, y $\frac{dy}{dx}$ es cero. La recta AB, en consecuencia, corta a OX en este punto.

Por ello, cuando $x = 2$ se dice que la función tiene un valor estacionario, y C se denomina un punto estacionario de la curva. Estas importantes conclusiones pueden resumirse de la manera siguiente:

1. *Si* $x < +2$, y *disminuye y* $\frac{dy}{dx}$ *es negativo.*
2. *Si* $x > +2$, y *aumenta y* $\frac{dy}{dx}$ *es positivo.*
3. *Cuando* $x = 2$, *en* C *momentáneamente no hay aumento ni disminución, esto es, la función tiene un valor estacionario y* $\frac{dy}{dx} = 0$.

A continuación, consideraremos la función:

$$y = 3 + 2x - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2x$$

Las gráficas de estas funciones se muestran en la figura 6.4 en la que la recta AB representa la función derivada $2 - 2x$. Examinando estas gráficas, como hicimos antes, vemos que:

1. *Cuando* $x < +1$, *y aumenta y* $\frac{dy}{dx}$ *es positivo.*
2. *Cuando* $x > +1$, *y disminuye y* $\frac{dy}{dx}$ *es negativo.*
3. *Cuando* $x = 1$, *en* C, *y ha dejado aumentar y comienza a disminuir.*

Por tanto, el valor de la función en C *es estacionario y la curva tiene un punto estacionario.*

6.3. Extremos relativos

Al comparar los puntos estacionarios en las figuras 6.3 y 6.4 de las curvas

$$y = x^2 - 4x + 3$$

y

$$y = 3 + 2x - x^2$$

notamos las siguientes importantes diferencias:

— En $y = x^2 - 4x + 3$, en el punto estacionario,

1. La curva cambia de cóncava hacia arriba decreciente a cóncava hacia arriba creciente (Figs. 6.1*a* y 6.2*a*). El ángulo, θ, cambia de un ángulo *obtuso*, pasando por cero, a un ángulo *agudo*.
2. Los valores de la función disminuyen antes y aumentan después del punto estacionario.
3. Por consiguiente, $\frac{dy}{dx}$ es negativo antes y positivo después de dicho punto.

— En $y = 3 + 2x - x^2$

1. La curva cambia de cóncava hacia abajo creciente a cóncava hacia abajo decreciente, pero θ cambia de un ángulo *agudo* antes del punto a un ángulo *obtuso* después del punto estacionario (Figs. 6.1*b* y 6.2*b*).

2. Los valores de la función aumentan antes y disminuyen después del punto.
3. Por consiguiente, $\frac{dy}{dx}$ es positivo antes y negativo después del punto estacionario.

Por tanto, en los dos puntos estacionarios:

1. La función disminuye antes y aumenta después, o viceversa.
2. $\frac{dy}{dx} = 0$ y cambia de signo.

Estos puntos de una curva se llaman *valores extremos.* Más adelante veremos que no todos los puntos estacionarios son extremos.

Debe notarse que tanto en los puntos estacionarios como en los puntos extremos una condición esencial es que $\frac{dy}{dx} = 0$. La diferencia entre un tipo de puntos y otro viene dada por el comportamiento de la función y, por tanto, de la derivada, antes y después del punto.

Ejemplos resueltos

1. ¿Para qué valor de x existe un extremo en la curva $y = 2x^2 - 6x + 9$?

Si

$$y = 2x^2 - 6x + 9$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

Para un punto estacionario:

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x - 6 = 0$$

y

$$x = 1{,}5$$

Para valores de $x < 1{,}5$, $\frac{dy}{dx}$ es negativo, luego la función es decreciente.

Para valores de $x > 1{,}5$, $\frac{dy}{dx}$ es positivo, por lo que la función es creciente.

Como la función es decreciente antes del punto estacionario y creciente después, existe un valor extremo cuando $x = 1{,}5$.

2. Hallar los puntos estacionarios de $y = 1 - 2x - x^2$.

Si

$$y = 1 - 2x - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 - 2x$$

Los valores estacionarios se dan cuando cuando $\frac{dy}{dx} = 0$, luego

$$-2x - 2 = 0 \quad \text{y} \quad x = -1$$

Por tanto, se da un punto estacionario para $x = -1$.

— Si $x < -1$, $\frac{dy}{dx}$ es positivo; luego y aumenta.

— Si $x > -1$, $\frac{dy}{dx}$ es negativo; luego y disminuye.

Entonces:

— y aumenta antes y disminuye después del punto estacionario.

— El punto estacionario es también extremo cuando $x = -1$.

Nota. Se recomienda trazar las curvas de las dos funciones anteriores.

6.4. Valores máximos y mínimos

Existe una diferencia importante entre los valores extremos de las curvas de las funciones estudiadas en 6.2, a saber:

$$y = x^2 - 4x + 3$$
$$y = 3 + 2x - x^2$$

como se habrá observado comparando las figuras 6.3 y 6.4.

1. En $y = x^2 - 4x + 3$ (Fig. 6.3) el extremo C es el punto *más bajo* de la curva, esto es, en ese punto y tiene su *mínimo* valor. Si tomamos puntos en la curva cercanos a este valor, a ambos lados de C, el valor de la función en cada uno de ellos es mayor que en C, el valor extremo.

Este punto se llama punto mínimo, *y se dice que la función tiene un* valor mínimo *para ese valor de* x.

Debe observarse que los valores de la función disminuyen hasta el punto mínimo y luego aumentan.

2. En $y = 3 + 2x - x^2$ (Fig. 6.4) el extremo C es el punto *más alto* de la curva, esto es, en ese punto y alcanza su valor *máximo*. Si, al igual que antes, se toman puntos de la curva cercanos a ambos lados de C, el valor de la función en cada uno de esos puntos es *menor* que en C.

Este punto se llama punto máximo, *y se dice que la función tiene un* valor máximo *para ese valor de* x.

Los valores de la función aumentan hasta el valor máximo y luego disminuyen.

Los valores de la función en los puntos máximo y mínimo, aunque son mayores o menores que los valores de los puntos cercanos a ellos en la curva, no son necesariamente los valores máximos o mínimos que pueden tener algunas funciones. Por eso se suelen llamar *relativos* o *locales*, en contraposición a *absolutos* o *globales*. Esto es claro en una función como la que vamos a estudiar a continuación. Ejemplos de valores máximos y mínimos también podrán encontrarse en la figura 6.5 correspondiente.

6.5. La curva de $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Esta función se hará cero cuando $x - 1 = 0$, $x - 2 = 0$, o $x - 3 = 0$, esto es, cuando $x = 1$, $x = 2$ y $x = 3$.

Por consiguiente, la curva cortará el eje OX en estos valores de x. Si la función es continua, esto es, si pequeños cambios de x producen siempre pequeños cambios correspondientes de y, entonces, *entre dos valores consecutivos de la curva que cortan al eje debe existir un valor extremo relativo.*

Por tanto, para la curva de la función anterior debe haber dos extremos.

1. Entre los puntos $x = 1$ y $x = 2$.
2. Entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$.

Observemos, además, al examinar la función que

1. Si $x < 1$, y es siempre negativa.
2. Si $x > 1$ y < 2, y es positiva.
3. Si $x > 2$ y < 3, y es negativa.
4. Si $x > 3$, y es siempre positiva.

Estos dos últimos conjuntos de resultados nos llevan a concluir:

1. Que hay un punto máximo (positivo) entre $x = 1$ y $x = 2$.
2. Que hay un punto mínimo (negativo) entre $x = 2$ y $x = 3$.

Construyendo la tabla usual de los valores correspondientes de x e y, y a partir de las anteriores conclusiones, podemos trazar la curva de la figura 6.5. Sin embargo, necesitaríamos hacer cálculos muy tediosos para obtener con un alto grado de exactitud el valor de los puntos máximos o mínimos, o los valores correspondientes de x.

Procedemos, por tanto, al tratamiento algebraico del problema. Multiplicando los términos del segundo miembro de la función, tenemos:

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 11$$

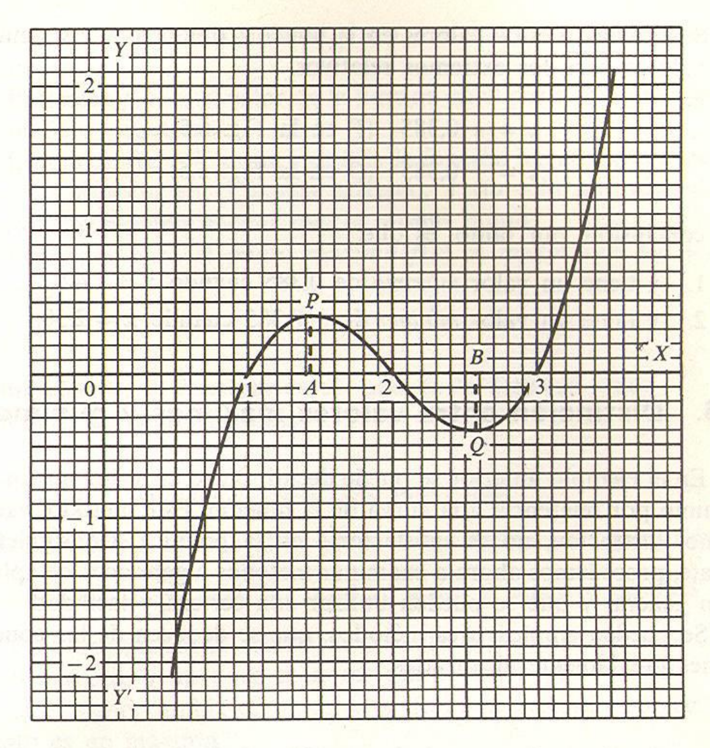


Figura 6.5.

Para que haya extremos, una condición necesaria es que

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 12x + 11 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, las dos raíces son, aproximadamente, $x = 1{,}42$ y $x = 2{,}58$.

Para estos valores de x, señalados con las letras P y Q en la figura 6.5, hay, por tanto, extremos en la curva.

Sustituyendo estos valores en la función, obtenemos los siguientes valores para los extremos relativos.

$$y = +\,0{,}385 \quad (P \text{ en la Fig. } 6.5)$$

$$y = -\,0{,}385 \quad (Q \text{ en la Fig. } 6.5)$$

La conclusión, por tanto, es que:

1. y tiene un valor *máximo* de 0,385 cuando $x = 1{,}42$.
2. y tiene un valor *mínimo* de $-0{,}385$ cuando $x = 2{,}58$.

6.6. Distinción entre valores máximos y mínimos

En el ejemplo anterior se puede decidir entre un valor máximo y mínimo por referencia a la curva de la función. Este método, válido como ilustración, no es satisfactorio en la práctica. Consiguientemente, procedemos ahora a examinar métodos algebraicos de aplicación general y que se pueden utilizar con certeza y facilidad.

Se pueden emplear tres métodos, que se deducen de las conclusiones previamente alcanzadas.

Comprobación 1. Examen de los cambios de la función en las inmediaciones de los puntos extremos

Se definió un *punto máximo relativo* de $f(x)$ como aquel en el que el valor de la función es *mayor* que valores de x un poco mayores o menores que el valor de x en el punto extremo.

Similarmente, se definió un *punto mínimo relativo* como aquel en el que el valor de la función es *menor* que valores de x ligeramente mayores o menores que el valor de x en el punto extremo.

La prueba 1 consiste en la aplicación de estas definiciones. Se sustituyen en la función los valores ligeramente mayores y menores que el valor de x en el punto extremo. Comparando los resultados que se obtienen, podemos decidir cuál de las definiciones anteriores se satisface.

Esto se puede expresar, en términos generales, de la manera siguiente:

Sea $f(x)$ una función de x, y sea a el valor de x en el punto extremo.

Entonces, $f(a)$ es el valor de la función en el punto extremo. Sea h un número pequeño.

Entonces, $f(a + h)$ es un valor de la función ligeramente superior al de la función en el punto extremo, y $f(a - h)$ un valor de la función ligeramente menor que el mismo punto.

Entonces, para el punto máximo $f(a)$ es mayor que $f(a + h)$ y $f(a - h)$.

Comprobación 2. Cambios en el valor de la derivada antes y después del punto extremo

1. *Punto máximo.* Hemos visto antes que:

La función aumenta antes y disminuye después del punto extremo. Por tanto, $\frac{dy}{dx}$ debe ser positivo antes y negativo después.

Para comprobarlo, sustitúyanse en la derivada valores de x un poco mayores y un poco menores que el valor en el punto.

Si el signo cambia de positivo a negativo pasando por cero, el punto es un máximo.

2. *Punto mínimo.* De igual modo, puesto que $\frac{dy}{dx}$ debe ser negativo antes y positivo después, si al sustituir como antes el signo cambia de negativo a positivo, pasando por cero, el punto es un mínimo.

Si no hay cambio en el signo de la derivada, entonces no hay extremo.

Comprobación 3. Signo de la derivada segunda

Este método se basa en el hecho de que $\frac{d^2y}{dx^2}$ es derivada de $\frac{dy}{dx}$, e indica, por tanto, las variaciones de esa función.

1. *Punto máximo:*

   a) La función aumenta antes y disminuye después.

   b) $\frac{dy}{dx}$ es positivo antes y negativo después.

   c) En un punto máximo $\frac{dy}{dx}$ disminuye.

   d) $\frac{d^2y}{dx^2}$ debe ser negativo.

2. *Punto mínimo:*

   a) La función disminuye antes y aumenta después.

   b) $\frac{dy}{dx}$ es negativo antes y positivo después.

   c) En un punto mínimo $\frac{dy}{dx}$ aumenta.

   d) $\frac{d^2y}{dx^2}$ debe ser positivo.

6.7. Ilustraciones gráficas

Todas estas consideraciones se pueden ilustrar considerando en detalle la curva

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

o

$$y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

cuyos puntos extremos se estudiaron en el apartado 6.5.

Puesto que

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$$
$$f''(x) = 6x - 12$$

Las curvas de estas funciones son las de la figura 6.6.

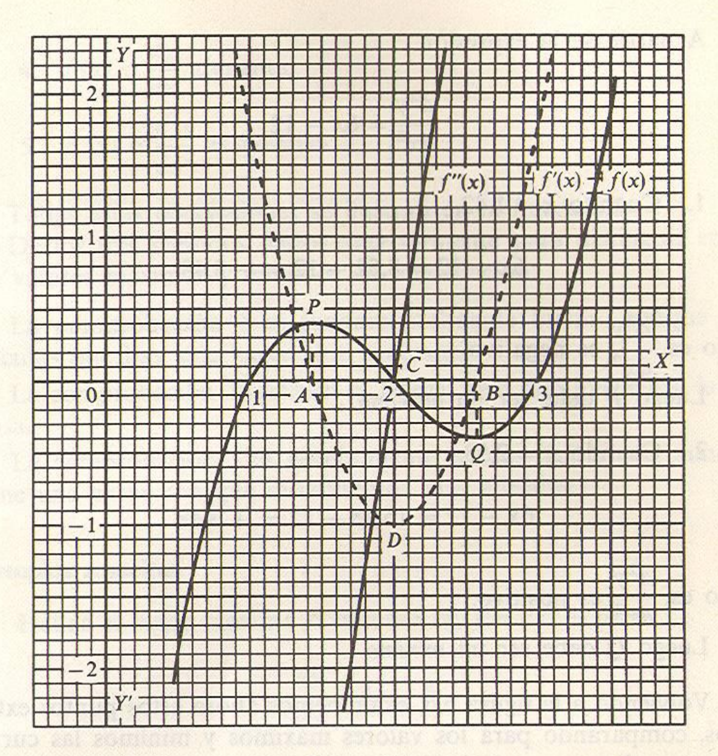


Figura 6.6.

Al comprobar los puntos extremos,

$$3x^2 - 12x + 11 = 0$$

de donde $x = 1{,}42$ y $2{,}58$

Los valores correspondientes a estos valores de x, indicados como A y B en la figura 6.6, son los puntos P y Q, y ya se vio en el apartado 6.5 que en P, $f(x) = 0{,}385$ y en Q, $f(x) = -0{,}385$.

Se puede emplear la comprobación 3 anterior para distinguir algebraicamente entre el máximo y el mínimo.

Así, sustituimos en $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ o $f''(x)$ los valores de x que producen puntos extremos.

A partir de la expresión

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

1. Cuando $x = 1{,}42$,

$$6x - 12 = 8{,}52 - 12 = -3{,}48$$

esto es, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es negativo.

Luego P debe ser un *máximo*.

2. Cuando $x = 2{,}58$,

$$6x - 12 = 15{,}48 - 12 = +3{,}48$$

esto es, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo.

Luego Q debe ser un *mínimo*.

Volviendo a la figura 6.6, examinemos ahora estos puntos extremos, comparando para los valores máximos y mínimos las curvas correspondientes, es decir, $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$.

A) En el punto máximo P:

1. $f'(x) = 0$, condición necesaria para un extremo.
2. $f(x)$ aumenta antes de P y disminuye después.
3. $f'(x)$ es positiva antes de P y negativa después.
4. $f'(x)$ disminuye.
5. $f''(x)$ o $\frac{d^2y}{dx^2}$ es negativa.

B) En el punto mínimo Q:

1. $f'(x) = 0$, la condición necesaria.
2. $f(x)$ disminuye antes de Q y aumenta después.
3. $f'(x)$ es negativa antes de Q y positiva después.

4. $f'(x)$ o $\dfrac{dy}{dx}$ aumenta.

5. $f''(x)$ o $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ es positiva.

Todas estas conclusiones se ilustran en la figura 6.6.

De los tres métodos dados anteriormente para distinguir entre los valores máximos y mínimos de una función:

La comprobación 1 es fundamentalmente buena, aunque los cálculos que hay que hacer sean tediosos.

La comprobación 2 también es buena, pero con frecuencia laboriosa.

La comprobación 3 es generalmente la más fácil y útil, aunque tiene una excepción que discutiremos más adelante.

Ejemplos resueltos

1. Hallar el valor máximo o mínimo de $y = 2x^2 - 6x + 3$.

$$\frac{dy}{dx} = 4x - 6$$

Para un máximo o mínimo

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4x - 6 = 0$$

$$x = 1{,}5$$

Hay un punto extremo en la curva para $x = 1{,}5$. Para distinguir entre un máximo o mínimo:

a) Considerando $\dfrac{dy}{dx} = 4x - 6$

1. Si $x < 1{,}5$, $\dfrac{dy}{dx}$ es negativa.

2. Si $x > 1{,}5$, $\frac{dy}{dx}$ es positiva.

Por tanto, $\frac{dy}{dx}$ aumenta, al aumentar x.

Luego por la comprobación 2, y es un mínimo cuando $x = 1{,}5$.

b) $\frac{d^2y}{dx^2} = 4$. Este valor es siempre positivo.

Luego por la comprobación 3, y es un mínimo cuando $x = 1{,}5$.

2. Hallar los puntos extremos de $y = 5 - x - x^2$ y ver si son máximos o mínimos.

Puesto que

$$y = 5 - x - x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = -1 - 2x$$

Para que haya un punto extremo se ha de cumplir que

$$-1 - 2x = 0$$

de donde $x = -\frac{1}{2}$.

a) Si $x < -1/2$, $-1 - 2x$ es positivo.
Si $x > -1/2$, $-1 - 2x$ es negativo.

Por tanto, $\frac{dy}{dx}$ disminuye al aumentar x.

Luego por la comprobación 2, y es un máximo cuando $x = -1/2$.

b) También este número es siempre negativo $\frac{d^2y}{dx^2} = -2$.

Luego por la comprobación 3, el punto extremo es un máximo.

3. Hallar los puntos extremos de la curva de $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$, y ver si se trata de máximos o mínimos.

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$$

Para que se den puntos extremos, es necesario que

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Luego

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

o

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = 3 \text{ ó } 1$$

Por tanto, hay puntos extremos para $x = 1$ y $x = 3$.

Para distinguir entre máximos y mínimos, utilizamos la comprobación 3 y examinamos $\frac{d^2y}{dx^2}$.

A partir de $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 12$:

— Si $x = 1$, $\frac{d^2y}{dx^2} = -6$, hay un máximo.

— Si $x = 3$, $\frac{d^2y}{dx^2} = +6$, hay un mínimo.

Luego la curva tiene un máximo cuando $x = 1$ y un mínimo cuando $x = 3$.

Los valores máximos y mínimos se pueden hallar sustituyendo estos valores de x en la función $x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. Son:

$+ 2$ para el valor máximo.

$- 2$ para el valor mínimo.

4. Al lanzar un cuerpo en dirección vertical con una velocidad de 7 ms^{-1}, la altura alcanzada después de t segundos viene dada por la fórmula $s = 7t - 4{,}9t^2$. Hallar la máxima altura a la que puede llegar el cuerpo y el tiempo que tardaría en alcanzarla.

s es una función de t: $s = 7t - 4{,}9t^2$.

Diferenciando con respecto a t, tenemos:

$$\frac{ds}{dt} = 7 - 9{,}8t$$

Pero cuando s es máximo, $\frac{ds}{dt} = 0$; luego

$$7 - 9{,}8t = 0$$

de donde:

$$t = \frac{1}{1{,}4}$$

También:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -9{,}8$$

que es siempre un valor negativo, por lo que el valor de s cuando $t = 1/1{,}4$ es un máximo.

Sustituyendo $t = 1/1{,}4$ en $s = 7t - 4{,}9t^2$, obtenemos: $s = 2{,}5$ m.

5. Supóngase que el coste, C, de 1 km de cable eléctrico viene dado por la relación $C = (120/x) + 600x$, donde x es la sección transversal

del cable en cm^2. Hallar la sección transversal para que el coste sea mínimo, y el coste mínimo por km de cable:

$$C = \frac{120}{x} + 600x$$

$$\frac{dC}{dx} = -\frac{120}{x^2} + 600$$

Para un valor máximo o mínimo de C, $\frac{dC}{dx} = 0$, luego

$$-\frac{120}{x^2} + 600 = 0$$

$$x^2 = \frac{120}{600}$$

$$x = \pm\sqrt{0{,}2} = \pm 0{,}447 \text{ cm}^2$$

En el presente contexto, la raíz negativa no tiene sentido y no se considera como posible solución.

Para ver si este valor de x corresponde a un máximo o un mínimo, utilizamos la comprobación 3.

Entonces:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{240}{x^3}$$

Cuando $x = 0{,}447$, el valor es positivo, por lo cual el coste es mínimo para esta sección transversal.

Sustituyendo x por su valor en $(120/x) + 600x$, obtenemos el coste mínimo. Así

$$C = \frac{120}{0{,}447} + 600 \times 0{,}447 = 537$$

6. Hallar la relación entre el radio de la base y la altura de un gasómetro cilíndrico de volumen V m^3, de forma que el coste de la

construcción de la parte metálica, sin incluir la base, sea mínimo. Hallar también el radio de la base, r, en función de V.

Sea h la altura del gasómetro, y A el área de la superficie, excluyendo la base.

El coste será mínimo cuando A sea mínima.

Utilizando las fórmulas del área y volumen del cilindro, sin la base, tenemos:

$$A = \pi r^2 + 2\pi r h \tag{1}$$

y

$$V = \pi r^2 h \tag{2}$$

Estas ecuaciones contienen dos variables independientes, r y h. En consecuencia, eliminamos una de ellas, h, entre las dos ecuaciones y obtenemos A en función de r y V, que es constante.

A partir de (2), tenemos:

$$h = \frac{V}{\pi r^2}$$

Sustituyendo en (1):

$$A = \pi r^2 + \left(2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2}\right) = \pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

A es una función de r; por tanto, al diferenciar A con respecto a r, tenemos:

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r - \frac{2V}{r^2}$$

Puesto que A debe ser un mínimo, $\frac{dA}{dr}$ debe ser igual a cero, luego:

$$2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0$$

$$\frac{V}{r^2} = \pi r$$

y

$$V = \pi r^3$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

También:

$$V = \pi r^2 h$$

$$\pi r^3 = \pi r^2 h$$

$$h = r$$

Nota. No se debe cometer el error de diferenciar A con respecto a r en la ecuación (1) tal como está. Hay que tener cuidado en distinguir las constantes de las variables en las ecuaciones utilizadas. Además de contener dos variables, la ecuación (1) no contiene la constante V. Por tanto, es necesario eliminar h y obtener A en función de r y V.

6.8. Puntos de inflexión

Cuando se estudió cómo distinguir los valores máximos de los mínimos de una función, una de las comprobaciones que se aplicaba (comprobación 3) era la del signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$; esto es, para un máximo es negativo y para un mínimo, positivo. Para completar esta comprobación es necesario avanzar y considerar lo que ocurre cuando $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

El siguiente breve estudio incluirá también un caso en que $\frac{dy}{dx} = 0$, pero en el que la función no es ni un máximo ni un mínimo.

Ilustramos, en primer lugar, estos puntos considerando el caso de $y = x^3$.

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

y

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x \ .$$

En la figura 6.7 se muestran las curvas de esta función y de sus dos primeras derivadas.

Se observa que la curva de $y = x^3$ pasa por el origen y que, en ese punto, su curvatura cambia de cóncava hacia abajo creciente (Fig. 6.1*b*) a cóncava hacia arriba creciente (Fig. 6.1*a*). Así, crece en cada parte, esto es, a lo largo de toda la curva, excepto en el origen, donde la curva es momentáneamente estacionaria. En ese punto, por tanto, existe un valor estacionario, la pendiente es cero, y la tangente a la curva es el eje OX. Por ello, no cumple la condición de un extremo, esto es, que aumente antes y disminuya después, o viceversa.

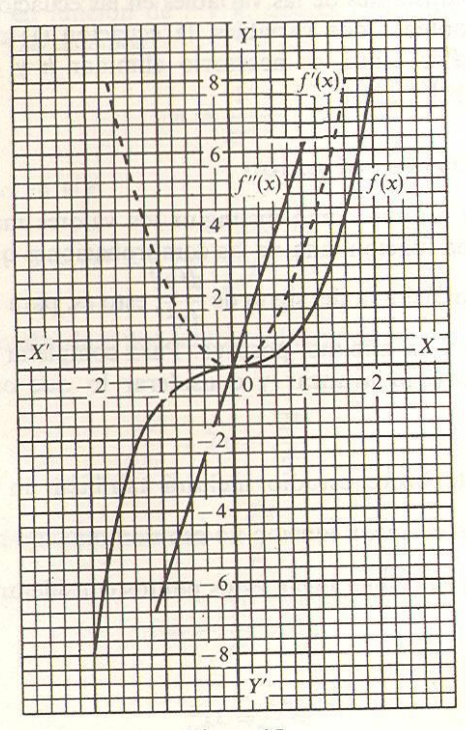


Figura 6.7.

La curva de su derivada —esto es, de $y' = 3x^2$— está representada por la parábola de trazo discontinuo. Esta curva es siempre positiva, lo que era de esperar por el hecho de que la función $y = x^3$ es siempre creciente. Su valor en el origen es cero. Esto indica que la pendiente $y = x^3$ es cero en ese punto, el cual es un mínimo para $y = 3x^2$. Esto indica, además, que $y = x^3$ tiene una pendiente mínima en el punto.

Dicho punto, cuando está sobre una curva se llama un *punto de inflexión*, palabra que indica una torcedura en la curva. La curvatura cambia en ese punto de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, o viceversa, como ocurrió en el caso de $y = -x^3$.

Ésta es una condición invariable de un punto de inflexión, aunque en ese punto $\frac{dy}{dx}$ no es necesariamente cero, como en el ejemplo anterior, esto es, la tangente en ese punto no es siempre paralela al eje OX. Ni un valor cero de $\frac{dy}{dx}$ corresponde necesariamente a un punto extremo de la función. Sin embargo, en el punto de inflexión la pendiente es un mínimo y el valor mínimo de $\frac{dy}{dx}$ en este ejemplo es cero.

Como ejemplo de una función para la que la tangente de la curva en un punto de inflexión no es paralela a OX, podemos considerar el caso del punto C en la curva de

$$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3) \quad \text{(Fig. 6.6)}$$

En esta curva podemos notar:

1. En el punto C la curvatura cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

2. Cuando la curva es cóncava hacia abajo, $\frac{dy}{dx}$ disminuye. Por tanto, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es negativo (Ap. 6.1).

   Cuando la curva es cóncava hacia arriba, $\frac{dy}{dx}$ aumenta, luego $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positiva (Ap. 6.1).

3. En el punto de cambio, esto es, en el punto de inflexión, $\frac{d^2y}{dx^2}$ es cero.
4. Por consiguiente, $\frac{d^2y}{dx^2}$ cambia de signo en el punto de inflexión.
5. En el punto de inflexión, C, $\frac{dy}{dx}$ es un mínimo para el valor correspondiente de x.
6. Este valor de $\frac{dy}{dx}$ (a saber, -1) nos da la pendiente de la curva en el punto de inflexión. Es, por tanto, la pendiente de la tangente en el punto. Si θ es la pendiente de la tangente, entonces $\operatorname{tg}\theta = -1$ y $\theta = 135°$.

Resumiendo, se puede decir que en un punto de inflexión de una curva:

1. La curvatura cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, o viceversa.
2. Por consiguiente, $\frac{dy}{dx}$ aumentará antes y disminuirá después, o viceversa.
3. Por ello, $\frac{d^2y}{dx^2}$ será positivo antes y negativo después, o viceversa.
4. $\frac{dy}{dx}$ será también un máximo o un mínimo, luego

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Así, $\frac{d^2y}{dx^2}$ cambia de signo al pasar por el punto de inflexión.

Las comprobaciones para distinguir entre valores máximos y mínimos de una función se pueden resumir como sigue:

	Máximo	Mínimo	Punto de inflexión
$y = f(x)$	1. Aumenta antes. 2. Disminuye después.	1. Disminuye antes. 2. Aumenta después.	La curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o viceversa.
$\frac{dy}{dx}$	1. Positivo antes. 2. Negativo después. 3. Igual a 0 en el punto; por tanto disminuye.	1. Negativo antes. 2. Positivo después. 3. Igual a 0 en el punto; por tanto aumenta.	Un máximo o un mínimo.
$\frac{d^2y}{dx^2}$	Negativo.	Positivo.	Cero y cambia el signo.

Nota: Existen excepciones, pero esas funciones no se consideran en este libro.

EJERCICIOS

1. Trazar la curva de $y = x^2 - 2x$. Hallar dy/dx y obtener su valor cuando $x = -1, 0, 2, 3$, comprobando los valores sobre la gráfica. ¿Para qué valor de x hay un punto extremo en la curva? ¿Es un punto máximo o mínimo? ¿Cuál es el signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$?

2. Trazar la curva de $y = 3x - x^2$. Hallar dy/dx y calcular su valor cuando $x = 0, 1, 2, 3$. ¿Para qué valor de x, dy/dx es cero? ¿Cuál es el signo de $\frac{d^2y}{dx^2}$ para el mismo valor de x? ¿Es la función un máximo o un mínimo para este valor?

3. Hallar los puntos extremos de las funciones siguientes y discernir si la función es un máximo o un mínimo en cada caso:

a) $4x^2 - 2x$. *b)* $x - 1{,}5x^2$.

c) $x^2 + 4x + 2$. *d)* $2x^2 + x - 1$.

4. Hallar los valores máximos y mínimos de las funciones siguientes y establecer los valores correspondientes de x:

a) $x^3 - 12x$. *b*) $2x^3 - 9x^2 + 12x$.

c) $x^3 - 6x^2 + 12$. *d*) $4x^3 + 9x^2 - 12x + 13$.

e) $2 - 9x + 6x^2 - x^3$.

5. Hallar los valores máximos y mínimos de $(x + a)(x + 2)^2$ y los valores correspondientes de x.

6. Hallar los valores máximos y mínimos de $4x + 1/x$.

7. Dividir 10 en dos partes tales que su producto sea un máximo.

8. Se dispara una partícula con un ángulo θ y velocidad u. Su desplazamiento horizontal (x) y la altura alcanzada (y) están ligadas por la ecuación:

$$y = x \operatorname{tg} \theta - \frac{gx^2}{2u^2 \cos^2 \theta}$$

¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la partícula y cuál es la distancia máxima que recorre horizontalmente? (g es la aceleración de la gravedad, una constante.)

9. Se fabrica un tambor cilíndrico cerrado de 40 m^3 de capacidad. Si se desea emplear en su fabricación la cantidad mínima de metal, ¿cuál será la razón de la altura del tambor al diámetro de su base?

10. Se desea construir un tanque abierto de hierro laminado, de 8 m^3 de capacidad, con una base cuadrada y con las paredes perpendiculares a la base. Hallar el lado del cuadrado de la base y la profundidad, de forma que se emplee en su construcción la mínima cantidad de hierro.

11. Si $ds/dt = 4{,}8 - 3{,}2t$ y $s = 5$ cuando $t = 0{,}5$, expresar s como una función de t y hallar su valor máximo.

12. Si $H = pV$ y $p = 3 - (1/2)V$, hallar el valor máximo de H.

13. A una lámina rectangular de estaño, de 30 cm × 24 cm, se le cortan cuatro cuadrados iguales en sus esquinas y, a continuación, se doblan los lados para formar una caja rectangular. ¿Qué longitud de lado de cada cuadrado debe cortarse, de manera que el volumen de la caja sea el máximo posible?

14. La resistencia de una viga rectangular de una longitud dada es proporcional a bd^3, donde b representa la anchura y d la altura. Si la sección transversal de la viga tiene un perímetro de 4 m, hallar la anchura y la altura de la viga más resistente en esas condiciones.

15. Hallar los valores de x correspondientes a: *a*) un valor máximo; *b*) un valor mínimo, y *c*) un punto de inflexión de la curva $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$.

16. Hallar los valores máximo y mínimo de la curva $y = x(x^2 - 1)$. Hallar también la pendiente de la curva en el punto de inflexión.

17. Hallar el valor de x en el punto de inflexión de la curva $y = 3x^3 - 4x + 5$.

18. La distancia s recorrida por un cuerpo disparado verticalmente en un tiempo t viene aproximadamente dada por la fórmula

$$s = 120t - 4{,}9t^2$$

Hallar la altura máxima alcanzada por el cuerpo y el tiempo que tarda en conseguirla.

19. El momento de torsión (M) de una viga, sostenida por un extremo, a una distancia x del extremo viene dado por la fórmula

$$M = \frac{1}{2}wlx - \frac{1}{2}wx^2$$

donde l es la longitud y w la carga uniforme por unidad de longitud. Hallar el punto de la viga en el que el momento de torsión es máximo.

7 Diferenciación de las funciones trigonométricas

7.1. La medida circular de un ángulo

Al considerar la diferenciación de las funciones trigonométricas o circulares, debemos recordar que el ángulo cuya función se va a examinar se supone que viene dado en una medida circular. Así, al hallar la derivada del sen θ —esto es, la velocidad de aumento del sen θ con respecto a θ— es totalmente necesario que θ venga dado en unidades *absolutas*, y no en unidades arbitrariamente escogidas como grados. A menos que expresamente se indique lo contrario, en todo lo que se dice en adelante en este libro, los ángulos se considerarán medidos en radianes, y con frecuencia vendrán expresados de forma conveniente como fracciones o múltiplos de π radianes.

Los estudiantes que no tengan clara la medida circular de los ángulos deben revisar sus ideas sobre el tema antes de seguir adelante.

7.2. Diferenciación de sen x

Sea $y = \operatorname{sen} x$, y sea δx un incremento de x y δy el correspondiente incremento de y. Entonces:

$$y + \delta y = \operatorname{sen}(x + \delta x)$$

pero $y = \operatorname{sen} x$. Restando,

$$\delta y = \operatorname{sen}(x + \delta x) - \operatorname{sen} x$$

Dividiendo por δx,

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{\operatorname{sen}(x + \delta x) - \operatorname{sen} x}{\delta x} \qquad (1)$$

El siguiente paso será encontrar el valor del límite de la parte derecha de (1) cuando $\delta x \to 0$.

Esto requiere una cierta manipulación.

Primero, cambiamos el numerador de una suma a un producto utilizando la fórmula trigonométrica

$$\operatorname{sen} P - \operatorname{sen} Q = 2 \cos \frac{P + Q}{2} \operatorname{sen} \frac{P - Q}{2}$$

donde $(x + \delta x)$ sustituye a P, y x a Q.

Transformando el numerador de (1), tenemos:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{2 \cos \frac{[(x + \delta x) + x]}{2} \operatorname{sen} \frac{[(x + \delta x) - x]}{2}}{\delta x} =$$

$$= \frac{2 \cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \operatorname{sen} \frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

o reagrupando términos

$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2 \cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\delta x}{2}}{\delta x}$$

Pasando el factor numérico 2 a la parte derecha del denominador, tenemos:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \cos \left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} \qquad (2)$$

Así, el segundo factor adopta la forma $\frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}$, cuyo límite cuando $\theta \to 0$ se halló en el apartado 2.6. A partir de este valor sabemos que procediendo hasta el límite en (2):

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} = 1$$

Por tanto, tomando límites, tenemos:

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} \right]$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad (\text{puesto que } \delta x/2 \to 0)$$

Las pruebas geométricas de este resultado, así como de los que se exponen a continuación, son interesantes y se pueden encontrar en libros más avanzados sobre el tema.

7.3. Diferenciación de cos *x*

Utilizando la notación y el método empleado con el sen x, obtenemos:

$$\delta y = \cos(x + \delta x) - \cos x$$

Utilizando la fórmula

$$\cos P - \cos Q = -2 \operatorname{sen}\frac{P+Q}{2} \operatorname{sen}\frac{P-Q}{2}$$

$$\delta y = -2 \operatorname{sen}\left(x + \frac{\delta x}{2} \right) \operatorname{sen}\frac{\delta x}{2}$$

Dividiendo por δx:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -2\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\frac{\delta x}{2}}{\delta x} = -\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}}$$

(como en el apartado 7.2)

Por tanto,

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta y}{\delta x} = \lim_{\delta x \to 0} \left[-\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\delta x}{2}\right) \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\frac{\delta x}{2}}{\frac{\delta x}{2}} \right]$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = -\,\mathrm{sen}\,x$$

7.4. Diferenciación de tg x

Se puede calcular muy fácilmente utilizando las derivadas de $\mathrm{sen}\,x$ y $\cos x$ obtenidas anteriormente.

Puesto que

$$\mathrm{tg}\,x = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(\cos x \cdot \cos x) - [\mathrm{sen}\,x \cdot (-\,\mathrm{sen}\,x)]}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

Se puede obtener fácilmente una demostración a partir de principios elementales, mediante el método anterior de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, utilizando la fórmula trigonométrica adecuada.

7.5. Diferenciación de sec *x*, cosec *x* y ctg *x*

Se pueden hallar las derivadas de estas funciones a partir de principios elementales, como en los casos anteriores, pero se pueden hallar con más facilidad expresándolas como los recíprocos de $\cos x$, $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$, y utilizando la regla de diferenciación de un cociente.

a) $y = \operatorname{cosec} x$.

$$y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = \frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{(Regla del cociente.)}$$

Esto se puede expresar de forma más útil así:

$$\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$

b) $y = \sec x$.

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}. \qquad \text{(Regla del cociente.)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = \sec x \operatorname{tg} x$$

c) $y = \operatorname{ctg} x.$

$$y = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = \quad \text{(Regla del cociente.)}$$

$$= -\frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$

Luego:

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

Resumen

Los resultados anteriores se pueden resumir convenientemente de la siguiente forma:

Función	$\frac{dy}{dx}$
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\sec^2 x$
$\operatorname{cosec} x$	$-\cos x \operatorname{ctg} x$
$\sec x$	$\sec x \operatorname{tg} x$
$\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$

7.6. Diferenciación de formas modificadas

La diferenciación de las funciones trigonométricas con frecuencias requiere la aplicación de la regla de diferenciación de *una función de función*. Una forma muy corriente es la de un múltiplo de x, por ejemplo, ax. Ésta es una función con derivada a. De ahí que a deberá aparecer como un factor de la derivada de la función de función.

Así, si

$$y = \operatorname{sen} ax, \quad \frac{dy}{dx} = a \cos ax$$

$$y = \cos ax, \quad \frac{dy}{dx} = -a \operatorname{sen} ax$$

$$y = \operatorname{tg} ax, \quad \frac{dy}{dx} = a \sec^2 ax$$

y de modo semejante para sus recíprocos.

Por tanto,

$$\frac{d}{dx} \operatorname{sen} 2x = 2 \cos 2x$$

$$\frac{d}{dx} \cos \frac{x}{2} = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{x}{2}$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{tg} \frac{ax}{b} = \frac{a}{b} \sec^2 \frac{ax}{b}$$

Formas ligeramente más complicadas son las siguientes:

$$y = \operatorname{sen}(ax + b), \quad \frac{dy}{dx} = a \cos(ax + b)$$

$$y = \operatorname{sen}(\pi + nx), \quad \frac{dy}{dx} = n \cos(\pi + nx)$$

$$y = \operatorname{tg}(1-x), \quad \frac{dy}{dx} = -\sec^2(1-x)$$

$$y = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^3}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $y = \operatorname{sen}^2 x = (\operatorname{sen} x)^2$.

$$\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{sen} x \cdot \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = 2\operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x$$

2. Diferenciar $y = \operatorname{sen}\sqrt{x} = \operatorname{sen} x^{1/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x^{1/2}) \cdot \left(\frac{1}{2}x^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\cos x^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

3. Diferenciar $y = \sqrt{\operatorname{sen} x} = (\operatorname{sen} x)^{1/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x)^{-1/2} \cdot \frac{d(\operatorname{sen} x)}{dx} = \frac{\cos x}{2(\operatorname{sen} x)^{1/2}} = \frac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$$

4. Diferenciar $y = \operatorname{sen}^2(x^2)$ (véase Ap. 5.4).

$$y = (\operatorname{sen} x^2)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{sen} x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x = 4x \operatorname{sen} x^2 \cos x^2$$

7.7. Derivadas sucesivas

Sea $y = \text{sen}\, x$
Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\text{ sen}\, x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\cos x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \text{sen}\, x$$

Claramente, estas derivadas se repetirán en grupos de cuatro, coincidiendo con estas cuatro primeras.

Como sabemos, $\cos x = \text{sen}\,(x + \pi/2)$.

Luego las funciones anteriores se pueden escribir:

$$\frac{dy}{dx} = \cos x = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left[\text{sen}\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)\right] = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Se puede continuar indefinidamente, añadiendo $\pi/2$ a cada derivada sucesiva, manteniendo la forma *seno* de la función.

Así, de forma general, podemos escribir que

$$\frac{d^ny}{dx^n} = \text{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

Se pueden obtener de forma similar las derivadas sucesivas de $\cos x$. Las de $\operatorname{tg} x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ y $\operatorname{ctg} x$ se complican después de varios pasos de diferenciación, y no se pueden expresar con una fórmula general.

7.8. Valores máximos y mínimos de funciones trigonométricas

Nota. Si el lector no está familiarizado con las funciones de un ángulo de una magnitud cualquiera, debe revisar un texto de trigonometría.

1. $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$

Cuando

$$y = \operatorname{sen} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x$$

La curva más gruesa de la figura 7.1 representa $\operatorname{sen} x$. La de trazos representa $\frac{dy}{dx}$, y la curva fina corresponde a $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Una función periódica. Puesto que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$, la porción de curva entre $x = 0$ y $x = 2\pi$ se repetirá cada intervalo de 2π al aumentar x.

Así, la sección de curva entre 0 y 2π se repetirá un número infinito de veces entre $-\infty$ y $+\infty$, formando el todo una *curva continua.*

Sen x es un ejemplo de lo que se denomina una función periódica, siendo 2π el *período* de la función.

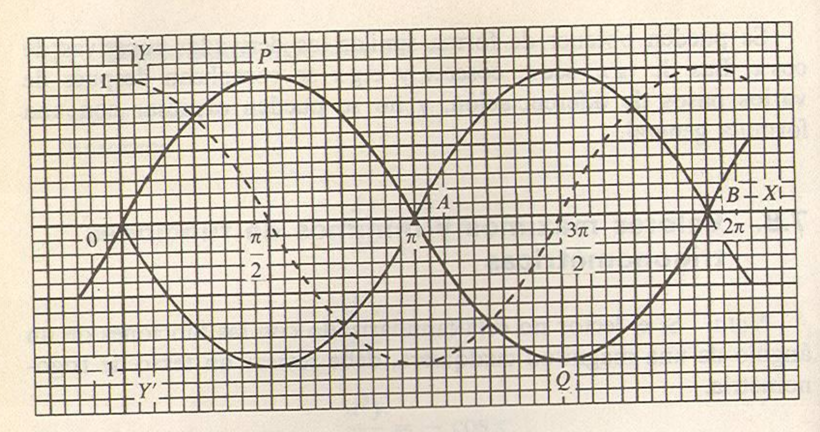


Figura 7.1.

Las siguientes características de la curva de sen x ilustran gran parte de lo dicho en el capítulo anterior.

a) *Tipos de curvatura.* La curva entre 0 y 2π nos da un ejemplo de los cuatro tipos de curvas ilustradas en las figuras 6.1 y 6.2, mientras que la de dy/dx ilustra la relación entre estas formas de curva y el signo de la derivada (véase Ap. 6.1).

b) *Puntos extremos.* La curva entre 0 y 2π muestra que entre estos dos valores de x existen dos puntos estacionarios, en P y Q, de valores $+1$ y -1.

En P, cuando $x = \pi/2$, $dy/dx = 0$, y d^2y/dx^2 es negativo, luego P es un punto máximo.

En Q, cuando $x = 3\pi/2$, $dy/dx = 0$, y d^2y/dx^2 es positivo, luego Q es un punto mínimo.

Esto es cierto para cualquier sección de 2π cuando x aumenta. Consiguientemente, a lo largo de toda la curva de $-\infty$ a $+\infty$ existe una secuencia infinita de puntos extremos alternando los máximos y los mínimos.

c) *Puntos de inflexión.* Existen dos puntos de inflexión en esta sección de la curva en A y B. En A la curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, dy/dx es un mínimo, a saber, -1, $d^2y/dx^2 = 0$, y cambia de un valor negativo a otro positivo.

Así, A es un punto de *gradiente mínimo*. Su pendiente viene dada por el valor de dy/dx en el punto, a saber, -1. Como ésta es la tangente del ángulo de la pendiente, la curva corta al eje formando un ángulo de $3\pi/4$.

En B la situación se invierte. La curva pasa de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo, dy/dx es un máximo, y $d^2y/dx^2 = 0$, y el signo cambia de positivo a negativo. B es, por tanto, un punto de *pendiente máxima*. Ésta es igual a $+1$, y la curva corta al eje con un ángulo de $\pi/4$.

También hay un punto de inflexión en el origen.

La figura 7.1 ilustra gráficamente la tabla del apartado 6.8.

La curva $\cos x$ es la de $\operatorname{sen} x$, desplazada hacia la izquierda $\pi/2$ a lo largo del eje OX. La forma y posición de la curva de dy/dx se muestra en la figura 7.1. Las observaciones anteriores respecto a $\operatorname{sen} x$ son aplicables a $\cos x$, disminuyendo en $\pi/2$ los ángulos, cuando éstos se forman.

2. $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$

Cuando:

$$y = \operatorname{tg} x \qquad\qquad y = \operatorname{cotg} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x \qquad\qquad \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec^2 x \operatorname{tg} x \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2\operatorname{cosec}^2 x \operatorname{ctg} x$$

Las curvas de $\operatorname{tg} x$ y de su derivada $\sec^2 x$ se representan en la figura 7.2, la última con trazo discontinuo.

Se observan las siguientes características de la curva $y = \operatorname{tg} x$:

a) *La curva es discontinua.* Cuando $x \to \pi/2$, $\operatorname{tg} x \to +\infty$.

Al pasar por $\pi/2$, un incremento infinitamente pequeño de x hace que el ángulo se forme en el segundo cuadrante. Su tangente, por tanto, es negativa, aunque numéricamente aún sea infinitamente grande. Con este incremento pequeño de x, la $\operatorname{tg} x$ cambia de $+\infty$ a $-\infty$. La curva de la función es, por

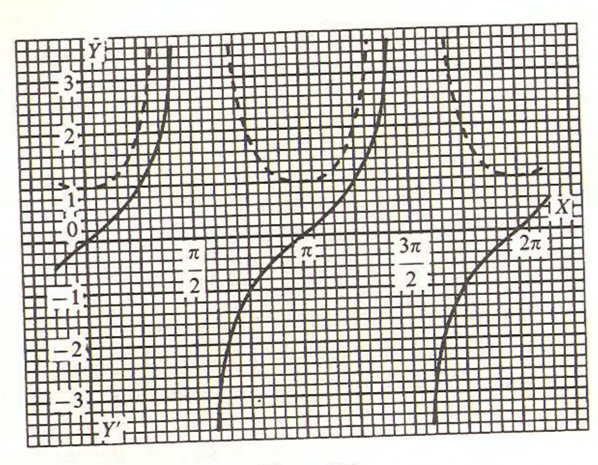


Figura 7.2.

tanto, discontinua. Cambios similares ocurren cuando $x = 3\pi/2$, $5\pi/2$, etc., como puede observarse en la figura 7.2.

b) *La curva de* tg x *es, por consiguiente, periódica y su período es* π.

c) *La función es siempre creciente.* Esto viene indicado por el hecho de que dy/dx, es decir, $\sec^2 x$, es siempre positivo.

d) *Hay un punto de inflexión para* $x = \pi$. La curva cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba, la derivada, $\sec^2 x$, es un mínimo, y su valor es $+1$.

Consiguientemente, la curva corta a OX formando un ángulo de $\pi/4$.

Puntos similares se dan para valores de $x = 0$ y cualquier número entero múltiplo de π.

Como $\operatorname{ctg} x = 1/\operatorname{tg} x$, su curva es la inversa de la de la tangente. Decrece siempre ($-\operatorname{cosec}^2 x$ es siempre negativa), es periódica y tiene puntos de inflexión para valores de $x = \pi/2$, $3\pi/2$, etc.

El lector debe trazar esta curva como ejercicio.

3. $y = \operatorname{cosec} x$, $y = \sec x$

Los puntos extremos de estas curvas se pueden deducir a partir de los de sus funciones recíprocas. Cuando $\operatorname{sen} x$ es un máximo,

cosec x es un mínimo; consiguientemente, las curvas son periódicas y los valores máximos y mínimos se suceden alternadamente. Si

$$y = \operatorname{cosec} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$$

Cuando

$$x = \frac{\pi}{2}, \ -\operatorname{cosec} x = -1, \ \operatorname{ctg} x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ será positivo.}$$

De ahí que exista un valor mínimo para $x = \pi/2$. Las dos curvas son discontinuas y periódicas.

Ejemplo resuelto

Hallar los puntos extremos de la curva $y = \operatorname{sen} x + \cos x$.

Si

$$y = \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x - \operatorname{sen} x$$

Para los puntos extremos se cumple

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

Entonces:

$$\cos x - \operatorname{sen} x = 0$$

$$\operatorname{sen} x = \cos x$$

y

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

Pero éste es el ángulo más pequeño de una serie cuya tangente es + 1. Todos los ángulos se incluirían en la fórmula general

$$n\pi + \frac{\pi}{4}$$

Por ello, los ángulos para los que existen puntos extremos en la anterior función serán

$$\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \cdots$$

También

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\operatorname{sen} x - \cos x$$

Esta función es negativa cuando

$$x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \cdots$$

y positiva cuando

$$x = \frac{5\pi}{4}, \cdots$$

luego la curva es periódica, y los valores máximos y mínimos se dan alternadamente:

Máximos cuando: $x = \frac{\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}, \cdots$

Mínimos cuando: $x = \frac{5\pi}{4}, \frac{13\pi}{4} \cdots$

Valor máximo: $= \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

Similarmente, valor mínimo: $-\sqrt{2}$

La curva se representa en la figura 7.3. P es el punto máximo y Q el mínimo. A es, obviamente, un punto de inflexión.

La curva se puede trazar, trazando primero las curvas de $\operatorname{sen} x$ y de $\cos x$, y sumando luego las ordenadas de las dos curvas para varios valores de x.

La curva de la figura 7.3 es un ejemplo sencillo de las que se denominan *curvas armónicas* o diagramas de onda, de gran importancia en Ingeniería Electromecánica.

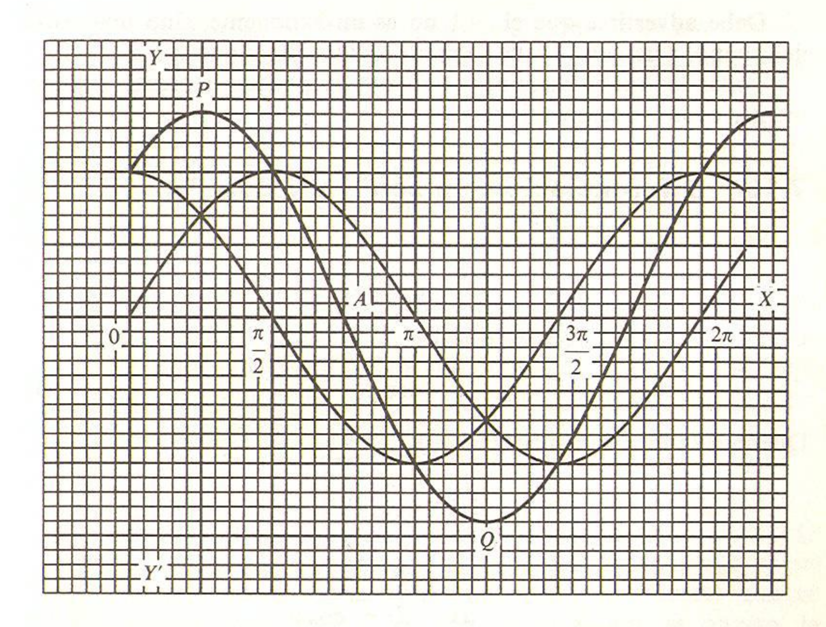


Figura 7.3.

7.9. Funciones trigonométricas inversas (funciones ciclométricas)

Cuando escribimos $y = \text{sen}\, x$, el seno se expresa como una función del ángulo denotado por x. Al variar x, el seno varía, esto es, el ángulo es la variable independiente y el seno la variable dependiente.

Pero puede ser necesario invertir esta relación, esto es, expresar el ángulo como una función del seno. Así, expresamos el hecho de que cuando el seno varía, el ángulo varía en consecuencia. El seno se convierte ahora en la variable independiente y el ángulo en la variable dependiente. Esta relación, como se sabe por trigonometría, se expresa mediante la relación

$$y = \text{sen}^{-1} x$$

que indica que y es el ángulo cuyo seno es x. A partir de esta expresión podemos escribir la relación de la función directa, esto es:

$$x = \text{sen}\, y$$

Debe advertirse que el -1 no es un exponente, sino una parte del símbolo de sen^{-1}, que expresa la función inversa.

Todas las otras funciones circulares se pueden expresar, similarmente, como funciones inversas.

7.10. Diferenciación de $\text{sen}^{-1} x$ y $\cos^{-1} x$

Sea

$$y = \text{sen}^{-1} x$$

Entonces, como queda indicado:

$$x = \text{sen}\, y \qquad (1)$$

Diferenciando x con respecto a y:

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y}$$

A partir de la relación $\operatorname{sen}^2 y + \cos^2 y = 1$, tenemos:

$$\cos y = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{[a partir de (1)]}$$

De ahí que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Similarmente

$$y = \cos^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Deben tenerse en cuenta los puntos siguientes sobre estas funciones y sus derivadas. Se pueden ver más fácilmente mediante la gráfica de la función $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ (Fig. 7.4).

1. La función puede tomar muchos valores, esto es, para un valor de x, hay un número infinito de valores de y; $y = \operatorname{sen} x$ es una función de un solo valor.
2. Puesto que $\operatorname{sen} y$ cae entre $+1$ y -1, la función $\operatorname{sen}^{-1} x$ existe solamente entre estos dos valores de x.
3. Puesto que existe un número infinito de ángulos que tienen un seno dado, para cualquier valor de x entre $+1$ y -1 existirá un número infinito de puntos en la curva. Por ejemplo, si $x = 1/2$, los valores de y en P, Q y R representan tres de los ángulos cuyo seno es $1/2$, siendo el de Q el ángulo positivo más pequeño.
4. La derivada de $\operatorname{sen}^{-1} x$, $1/\sqrt{1 - x^2}$, puede ser positiva o negativa. En la figura 7.4 se observa que en puntos como Q, en los que la pendiente de la curva es la tangente de un ángulo agudo, la derivada será positiva, mientras que en puntos como P y R, en los que el ángulo es obtuso, la derivada será negativa.

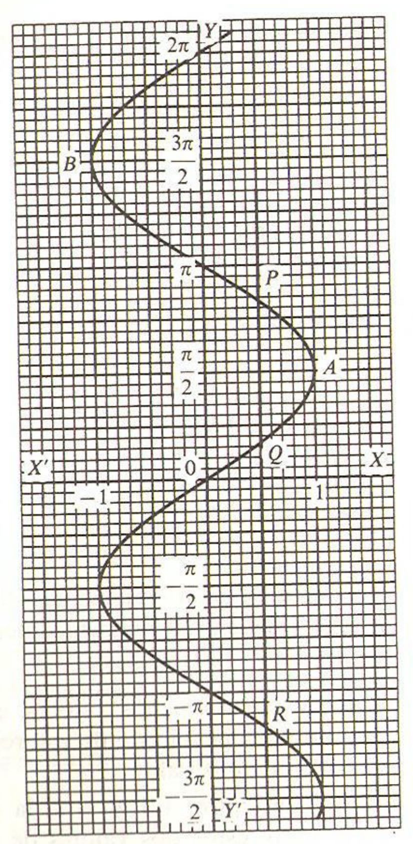


Figura 7.4.

5. Puesto que x cae entre $+1$ y -1, $1/\sqrt{1-x^2}$ no puede hacerse cero. Por tanto, la curva no tiene puntos máximos o mínimos. Si $x = \pm 1$, $1/\sqrt{1-x^2}$ se hace infinito. Por consiguiente, en puntos como A y B, la tangente a la curva es perpendicular al eje de las x.

7.11. Diferenciación de $\mathrm{tg}^{-1} x$ y $\mathrm{ctg}^{-1} x$

Sea

$$y = \mathrm{tg}^{-1} x$$

Entonces:

$$x = \mathrm{tg}\, y$$

Diferenciando con respecto a y:

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1 + \mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Similarmente, si $y = \mathrm{ctg}^{-1} x$, podemos demostrar que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}$$

En este caso, no hay ambigüedad posible en el signo.

En la figura 7.5 se ilustran los siguientes puntos de la curva de $\mathrm{tg}^{-1} x$.

1. dy/dx es siempre positivo; por ello y es siempre creciente.
2. dy/dx no es cero para ningún valor de x; luego no existen puntos extremos.
3. Se dan puntos de inflexión cuando $y = 0, \pi, 2\pi, -\pi$, etc. La pendiente es positiva.

La representación gráfica de $y = \mathrm{ctg}^{-1} x$ es la inversa de esta curva. dy/dx es siempre negativa; luego la función es siempre decreciente.

No hay puntos extremos, sino una serie de puntos de inflexión en los que la pendiente es negativa.

Se deja al lector el trazado de la curva, como ejercicio.

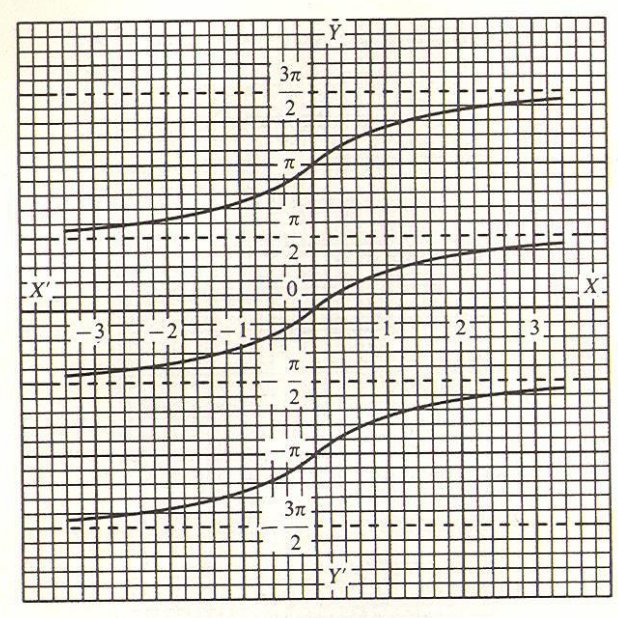


Figura 7.5.

7.12. Diferenciación de $\sec^{-1} x$ y $\operatorname{cosec}^{-1} x$

Sea

$$y = \sec^{-1} x$$

Entonces:

$$x = \sec y$$

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \operatorname{tg} y$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \operatorname{tg} y}$$

Pero

$$\operatorname{tg} y = \sqrt{\sec^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Por tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Similarmente, si

$$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

En la figura 7.6 se representa parte de la curva de $\sec^{-1} x$. Es una curva discontinua de múltiples valores que no existe entre $x = +1$ y $x = -1$.

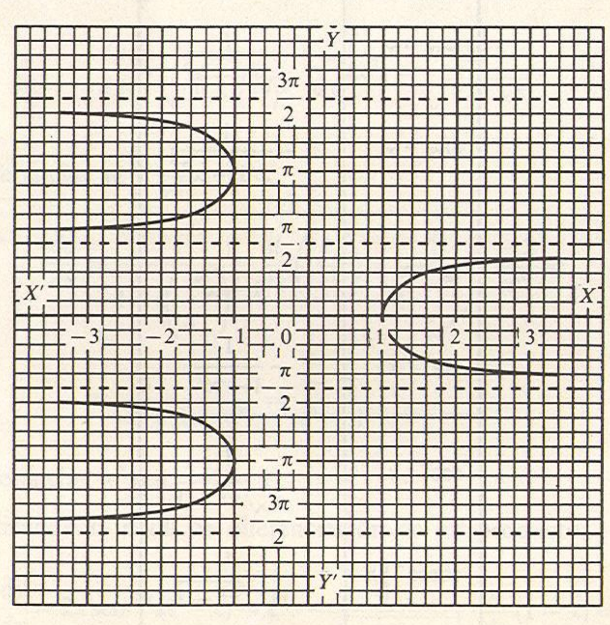


Figura 7.6.

$\frac{dy}{dx}$, esto es, $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ no se hace cero para ningún valor finito de x. No existen, por consiguiente, puntos extremos, pero cuando $x = \pm 1$, dy/dx se hace infinito, como en el caso de la curva de $\text{sen}^{-1} x$ (Fig. 7.4). La curva de $\text{cosec}^{-1} x$ es semejante.

7.13. Resumen de fórmulas

Las derivadas de las funciones inversas se presentan reunidas a continuación

Función	$\frac{dy}{dx}$
$\text{sen}^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{tg}^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{ctg}^{-1} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\text{cosec}^{-1} x$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

Debe también notarse que

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{a^2 + x^2}$$

$$\sec^{-1}\frac{x}{a} = \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

y de manera similar para las otras funciones.

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $\operatorname{sen}^{-1} x$.

Utilizando la regla de diferenciación de una «función de función»

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$

2. Diferenciar $\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{x^2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x^4}} \cdot \frac{-2}{x^3} =$$

$$= \frac{x^4}{x^4 + 1} \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{-2x}{x^4 + 1}$$

3. Diferenciar $x^2 \operatorname{sen}^{-1}(1 - x)$.

Utilizando la regla de diferenciación de un producto:

$$\frac{dy}{dx} = 2x\operatorname{sen}^{-1}(1 - x) + x^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - x)^2}} \cdot \frac{d}{dx}(1 - x) =$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}^{-1}(1-x) + \frac{x^2}{\sqrt{1-(1-2x+x^2)}}\cdot(-1) =$$

$$= 2x\,\mathrm{sen}^{-1}(1-x) - \frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}$$

EJERCICIOS

Diferenciar las siguientes funciones:

1. $3\,\mathrm{sen}\,x$. **2.** $\mathrm{sen}\,3x$. **3.** $\cos\frac{x}{2}$.

4. $\mathrm{tg}\frac{x}{3}$. **5.** $\sec 0{,}6x$. **6.** $\mathrm{cosec}\frac{x}{6}$.

7. $\mathrm{sen}\,2x + \cos 2x$. **8.** $\mathrm{sen}\,3x - \cos 3x$. **9.** $\sec x + \mathrm{tg}\,x$.

10. $\mathrm{sen}\,4x + \cos 5x$. **11.** $\cos\frac{1}{2}\theta + \mathrm{sen}\frac{1}{4}\theta$. **12.** $\mathrm{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

13. $\cos(3\pi - x)$. **14.** $\mathrm{cosec}\left(a - \frac{1}{2}x\right)$.

15. $\mathrm{sen}^3 x$. **16.** $\mathrm{sen}(x^3)$. **17.** $\cos^3(2x)$.

18. $\sec(x^2)$. **19.** $\mathrm{tg}\sqrt{1-x}$. **20.** $a\,\mathrm{sen}\,nx + b\cos nx$.

21. $a(1-\cos x)$. **22.** $2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$. **23.** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

24. $\mathrm{tg}\,2x - \mathrm{tg}^2 x$. **25.** $x^2 + 3\,\mathrm{sen}\frac{1}{2}x$. **26.** $\frac{a}{x}$.

27. $x \operatorname{sen} x$. **28.** $\dfrac{x}{\operatorname{sen} x}$. **29.** $x \operatorname{tg} x$.

30. $\dfrac{x}{\operatorname{tg} x}$. **31.** $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$. **32.** $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen}(2x)^2$.

33. $\cos^3(x^2)$. **34.** $x^2 \operatorname{tg} x$. **35.** $\operatorname{ctg}(5x + 1)$.

36. $\operatorname{ctg}^2 3x$. **37.** $\sqrt{\cos x}$. **38.** $\operatorname{sen} 2x \cos 2x$.

39. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$. **40.** $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x$. **41.** $\dfrac{1}{1 + \cos x}$.

42. $\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$. **43.** $\dfrac{\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x}$. **44.** $x^2 \cos 2x$.

45. $\dfrac{x^2}{\cos 2x}$. **46.** $\dfrac{\operatorname{tg} x - 1}{\sec x}$. **47.** $x\sqrt{\operatorname{sen} x}$.

48. $\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1 + \operatorname{sen} x}$. **49.** $\dfrac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$. **50.** $\sec^2 x \operatorname{cosec} x$.

¿Para qué valores de x, dentro del intervalo $0 < x < \pi$, existen valores máximos y mínimos de las funciones siguientes (números 51-56)? Las cuestiones 57 y 58 tienen intervalos diferentes, como se indica. Indicar en cada caso si se da un máximo o un mínimo (números 51-58).

51. $\operatorname{sen} 2x - x$. **52.** $\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x$. **53.** $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x$.

54. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \operatorname{tg} x}$. **55.** $2 \operatorname{sen} x + \cos x$. **56.** $\operatorname{sen} x + \cos x$.

57. $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x$, para el intervalo $0 < x < 2\pi$.

58. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x$, para el intervalo $-\pi/2 < x < 2\pi$.

59. ¿Cuál es el valor mínimo de x para el que $2\,\text{sen}\,x + 3\cos x$ es un máximo?

60. Hallar el valor mínimo de x para el que $\text{tg}^2 x - 2\,\text{tg}\,x$ es un máximo o un mínimo.

Diferenciar las funciones siguientes:

61. *a*) $\text{sen}^{-1} 4x$; *b*) $\text{sen}^{-1} \dfrac{x}{2}$.

62. *a*) $b \cos^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$; *b*) $\cos^{-1} \dfrac{x}{3}$.

63. *a*) $\text{tg}^{-1} \dfrac{x}{a}$; *b*) $\text{tg}^{-1}(a - x)$.

64. *a*) $\cos^{-1} 2x^2$; *b*) $\text{sen}^{-1} \sqrt{x}$.

65. *a*) $x\,\text{sen}^{-1} x$; *b*) $\text{sen}^{-1} \dfrac{1}{x}$.

66. *a*) $\text{sen}^{-1}(3x - 1)$; *b*) $\text{cosec}^{-1} \dfrac{x}{2}$.

67. *a*) $\text{tg}^{-1}(x + 1)$; *b*) $(x^2 + 1)\,\text{tg}^{-1} x$.

68. *a*) $\text{tg}^{-1} \sqrt{1 - x}$; *b*) $\text{sen}^{-1} \sqrt{1 - x^2}$.

69. *a*) $\sec^{-1} 5x$; *b*) $\sec^{-1} x^2$.

70. *a*) $\text{sen}^{-1}(\text{sen}\,x)$; *b*) $\text{sen}^{-1} \sqrt{\text{sen}\,x}$.

71. *a*) $2\sec^{-1} ax$; *b*) $\text{tg}^{-1} \sqrt{x}$.

72. *a*) $\text{tg}^{-1} \dfrac{2x}{1 - x^2}$; *b*) $\text{tg}^{-1} \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$.

73. *a*) $\sec^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; *b*) $\sec^{-1}\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

74. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$; *b*) $\operatorname{cosec}^{-1}\dfrac{1}{2x^2 - 1}$.

75. *a*) $x\operatorname{tg}^{-1}x$; *b*) $\operatorname{tg}x\operatorname{sen}^{-1}x$.

8 Funciones exponenciales y logarítmicas

8.1. Ley del interés compuesto del crecimiento

Seguramente estamos familiarizados con los dos métodos de calcular el interés del dinero, las llamadas reglas de interés simple y compuesto. En cada uno de estos métodos el interés está directamente relacionado con la magnitud de la suma de dinero implicada. Pero mientras que en el caso del interés simple el capital es el mismo año tras año, en el del interés compuesto, el interés se añade al capital al final de cada año, durante un período de tiempo, y así el interés del año siguiente se calcula sobre la suma del capital anterior y del interés.

Sea P el capital y sea r el tanto por 100 anual. El interés que se suma a P al final del primer año será $P \cdot \frac{r}{100}$.

Por tanto:

$$\text{Cantidad al final del primer año} = P + \frac{Pr}{100} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right).$$

Éste es el capital para el siguiente año. Luego razonando de la misma forma que hemos hecho para el primer año:

$$\text{Cantidad al final del segundo año} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^2.$$

$$\text{Cantidad al final del tercer año} = P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^3.$$

Cantidad al final de t años $= P\left(1 + \frac{r}{100}\right)^t.$

Supongamos que el interés se añade al final de cada semestre en vez de cada año. Entonces:

Cantidad al final del primer semestre $= P\left(1 + \frac{r}{2 \times 100}\right).$

Cantidad al final del primer año $= P\left(1 + \frac{r}{2 \times 100}\right)^2.$

Cantidad al final del segundo año $= P\left(1 + \frac{r}{2 \times 100}\right)^4.$

Cantidad al final de t años $= P\left(1 + \frac{r}{2 \times 100}\right)^{2t}.$

Si incluimos el interés 4 veces por año:

Cantidad al final del primer año $= P\left(1 + \frac{r}{4 \times 100}\right)^4.$

Cantidad al final de t años $= P\left(1 + \frac{r}{4 \times 100}\right)^{4t}.$

Similarmente, si el interés se añade mensualmente, esto es, 12 veces al año:

Cantidad al final de t años $= P\left(1 + \frac{r}{12 \times 100}\right)^{12t}.$

Si el interés se añade m veces al año:

Cantidad al final de t años $= P\left(1 + \frac{r}{100m}\right)^{mt}.$

En este resultado, sea $\frac{r}{100m} = \frac{1}{n}$. Entonces: $m = \frac{nr}{100}.$

Luego la cantidad después de t años será:

$$P\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{nrt}{100}}$$

$$P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{rt}{100}}$$

Supongamos ahora que n se hace infinitamente grande, esto es, que el interés se añade a intervalos de tiempo infinitamente pequeños, de forma que el crecimiento del capital se pueda considerar continuo.

Entonces, la cantidad a la que se llega será el límite de

$$P\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{rt}{100}}$$

cuando n se hace infinitamente grande.

Para calcular esta expresión, necesitamos hallar el límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando $n \to \infty$, esto es,

$$\text{Cantidad} = P\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{rt}{100}}$$

Es necesario, por tanto, encontrar el valor de

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

8.2. El valor de $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

Desarrollando $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ mediante el teorema del binomio:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots$$

Simplificando, tenemos

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!} + \cdots$$

Pero el límite de $(1 + 1/n)^n$ es igual a la suma de los límites (teorema 2 de los límites). Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} = \frac{1}{2!}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{3!} = \frac{1}{3!}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)}{r!} = \frac{1}{r!}, \text{ etc.}$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

El límite viene, por tanto, representado por una serie infinita. Se puede demostrar que conforme el número de términos aumenta sin límite, la suma de todos los términos tiende a un límite finito, esto es, la serie es *convergente* (véase Ap. 2.5). Su valor se ha calculado con cientos de decimales y se puede hallar aritméticamente de la manera siguiente, hasta el grado de exactitud que se desee. Cada término se

término se puede calcular a partir del precedente por simple división del término anterior por el nuevo factor del denominador. Así:

Primer término	= 1,000000	
Segundo término	= 1,000000	
Tercer término	= 0,500000	(dividiendo el segundo término por 2)
Cuarto término	= 0,166667	(dividiendo el tercer término por 3)
Quinto término	= 0,041667	(dividiendo el cuarto término por 4)
Sexto término	= 0,008333	
Séptimo término	= 0,001389	
Octavo término	= 0,000198	
Noveno término	= 0,000025	
Décimo término	= 0,000003	
Suma de 10 términos	= 2,718282	

Así, su valor con seis cifras significativas es 2,71828.
Esta constante se denota siempre por la letra e.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

Hemos visto antes que la cantidad A a interés compuesto después de t años, cuando el interés se añade continuamente es

$$A = P\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{rt}{100}}$$

cuando n se hace indefinidamente grande.

Sustituyendo $(1 + 1/n)^n$ por su límite cuando $n \to \infty$, obtenemos:

$$A = Pe^{rt/100}$$

Sea $\dfrac{rt}{100} = x$

Entonces, podemos escribir:

$$A = Pe^x$$

e^x se denomina *función exponencial*, ya que su exponente es la parte variable de la función, sea t, como antes, o x, en general.

8.3. Ley del interés compuesto

El principio fundamental utilizado para llegar al resultado anterior es que el crecimiento del capital es continuo en el tiempo y no ocurre por aumentos repentinos a intervalos regulares.

En la práctica, el interés compuesto se va añadiendo a intervalos definidos de tiempo; sin embargo, el fenómeno del crecimiento continuo es una ley natural del crecimiento y cambio orgánico. En muchos procesos físicos, químicos, eléctricos y de ingeniería, las expresiones matemáticas de los mismos contienen funciones en las que la variación es proporcional a las funciones mismas. En tales casos la función exponencial forma parte de esas expresiones, y como el principio fundamental es el que hemos utilizado en las anteriores deducciones sobre el interés compuesto, esta ley de crecimiento fue llamada por Lord Kelvin la *Ley del interés compuesto.*

8.4. La serie exponencial

Vamos ahora a ver que la función e^x puede expresarse en una serie que contiene potencias crecientes de x, algo que podíamos haber anticipado, ya que hemos utilizado una serie para llegar al límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando n se hace infinito.

Como

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$e^x = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^x = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx}$$

Desarrollando esta expresión por el teorema del binomio

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + nx\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3!}\frac{1}{n^3} + \cdots =$$

$$= 1 + x + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)}{2!} + \frac{x\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{2}{n}\right)}{3!} + \cdots$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Esto es,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Se puede demostrar que esta serie es *convergente*.
Sustituyendo x por $-x$, obtenemos

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Semejantemente:

$$e^{ax} = 1 + ax + \frac{a^2x^2}{2!} + \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-ax} = 1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a^3x^3}{3!} + \cdots$$

8.5. Diferenciación de e^x

Se puede llevar a cabo suponiendo la serie para e^x como antes y diferenciándola en cada uno de sus términos.

Como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \cdots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Pero ésta es la serie para e^x, luego

$$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

Esta propiedad de que la derivada de e^x es igual a la función misma sólo la tiene esta función de x. Esto era esperable, puesto que hemos visto que fundamentalmente e^x es una función cuya velocidad de cambio es proporcional a sí misma.

Similarmente, si

$$y = e^{-x}, \frac{dy}{dx} = -e^{-x}$$

$$y = e^{ax}, \frac{dy}{dx} = ae^{ax}$$

$$y = e^{-ax}, \frac{dy}{dx} = -ae^{-ax}$$

También se puede diferenciar e^x fácilmente utilizando principios elementales, paso a paso.

8.6. La curva exponencial

1. Si

$$y = e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = e^x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

Puesto que $\frac{dy}{dx}$ es siempre positivo, la curva de la función e^x debe ser positiva y *siempre creciente*, luego no tiene puntos extremos.

Puesto que $\frac{d^2y}{dx^2} = e^x$, esta derivada no se hace cero para ningún valor de x. Por tanto, no hay *punto de inflexión*.

2. Si

$$y = e^{-x}$$

$$\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$$

Aplicando el mismo razonamiento de antes, $\frac{dy}{dx}$ es siempre negativo, luego, la curva es *siempre decreciente*. No hay puntos extremos ni de inflexión.

Las dos curvas se muestran en la figura 8.1. Para trazarlas, los valores de las dos funciones pueden encontrarse en las tablas de las páginas 521-526. La curva de e^x ilustra el aumento continuo de una función según la ley del interés compuesto.

La curva de e^{-x} indica una ley de decrecimiento común en procesos físicos y químicos, representando una ley de *decaimiento*, en la que la disminución es proporcional a la magnitud de lo que está

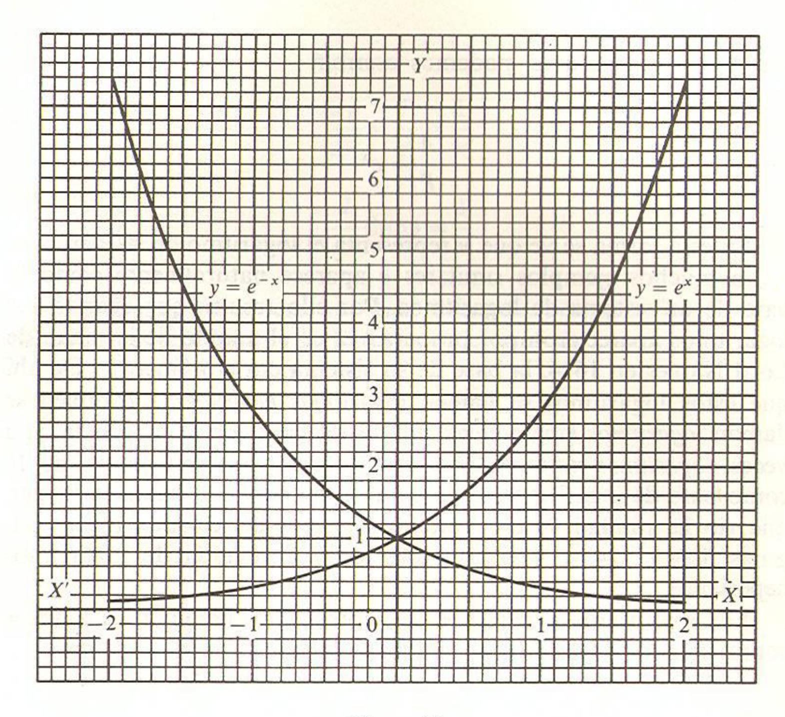


Figura 8.1.

yendo en un instante cualquiera. Un ejemplo de esto es la pérdida de la temperatura en un cuerpo que se enfría.

8.7. Logaritmos neperianos, hiperbólicos o naturales

En el apartado 8.2 llegamos a la fórmula

$$A = Pe^{rt/100}$$

que se puede escribir:

$$\frac{A}{P} = e^{rt/100}$$

Sea $\frac{rt}{100} = x$. Entonces, podemos escribir:

$$\frac{A}{P} = e^x$$

En esta forma se ve que x representa el logaritmo de A/P en base e. En muchos ejemplos similares e aparece naturalmente como la base de un sistema de logaritmos. Por ello resultó que cuando los logaritmos aparecieron por primera vez en el mundo de la mano de Lord Napier en 1614, la base de su sistema era el número e. De ahí que estos logaritmos se llamen *logaritmos neperianos*. También se llaman *logaritmos hiperbólicos*, por su relación con la hipérbola, y, a veces, *logaritmos naturales*. La introducción, posteriormente, de 10 como base de logaritmos se debió a un matemático llamado Briggs, que vio la utilidad de este cambio a efectos del cálculo. En las páginas 523 y 524 se presenta una tabla abreviada de logaritmos neperianos.

Los logaritmos neperianos se expresan mediante ln, o a veces como $\log_e$. En este libro se empleará la notación ln.

8.8. Diferenciación de ln *x*

La derivada de $\ln x$ se obtiene fácilmente a partir de principios elementales. La deducción implica el límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando $n \to \infty$. La diferenciación también puede llevarse a cabo como sigue:

Sea

$$y = \ln x$$

Entonces

$$x = e^y$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si el logaritmo tuviera una base diferente, por ejemplo a, entonces lo podemos pasar a la base e por el método usual.

Así, si

$$y = \log_a x$$

entonces

$$y = \ln x \log_a e$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

Como un caso especial, si

$$y = \log_{10} x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_{10} e = \frac{1}{x} \cdot 0{,}4343$$

8.9. Diferenciación de las funciones exponenciales generales

e^x es un caso especial de a^x, donde a es un número positivo cualquiera. Sea

$$y = a^x$$

Entonces

$$\ln y = x \ln a$$

$$x = \ln y \cdot \frac{1}{\ln a}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \ln a$$

Luego

$$\frac{dy}{dx} = a^x \cdot \ln a$$

Como un caso especial, si

$$y = 10^x$$

$$\frac{dy}{dx} = 10^x \cdot \ln 10$$

8.10. Resumen de fórmulas

Función	Derivada
e^x e^{-x} a^x	e^x $-e^{-x}$ $a^x \ln x$
$\ln x$	$1/x$

Ejemplos resueltos

1. Diferenciar $y = e^{3x^2}$.

Utilizando la regla de una función de función,

$$y = e^{3x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x^2} \cdot \frac{d}{dx}(3x^2) = 6x \cdot e^{3x^2}$$

2. Diferenciar $y = \ln x^2$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}$$

O se puede obtener teniendo en cuenta que $\ln x^2 = 2 \ln x$.

3. Diferenciar $\ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Esta expresión se puede escribir

$$y = \ln x^2 - \ln (x^2 - 1)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{1}{x^2} \cdot 2x\right) - \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/2}} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 - 1)^{1/2} =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{1}{(x^2 - 1)^{1/2}} \cdot \left[\frac{1}{2}(x^2 - 1)^{-1/2} \cdot 2x\right] =$$

$$= \frac{2}{x} - \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2}{x(x^2 - 1)}$$

4. Diferenciar $y = e^{-ax} \operatorname{sen}(bx + c)$.

Esta función es importante en muchos problemas eléctricos y físicos, como, por ejemplo, la ley de decaimiento de la oscilación de un péndulo en un medio resistente.

Sea

$$y = e^{-ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c)$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = [e^{-ax} \cdot b\cos(bx + c)] - [ae^{-ax}\,\mathrm{sen}\,(bx + c)] =$$

$$= e^{-ax}[b\cos(bx + c) - a\,\mathrm{sen}\,(bx + c)]$$

EJERCICIOS

Diferenciar las siguientes funciones:

1. *a*) e^{5x}; *b*) $e^{x/2}$; *c*) $e^{\sqrt{x}}$.

2. *a*) e^{-2x}; *b*) $e^{-5x/2}$; *c*) $e^{(5-2x)}$.

3. *a*) e^{-px}; *b*) $e^{x/a}$; *c*) $e^{(ax+b)}$.

4. *a*) $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; *b*) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; *c*) e^{x^2}.

5. *a*) xe^x; *b*) xe^{-x}; *c*) x^2e^{-x}.

6. *a*) $(x + 4)e^x$; *b*) $e^x\,\mathrm{sen}\,x$; *c*) $10\,e^x$.

7. *a*) 2^x; *b*) 10^{2x}; *c*) $e^{\mathrm{sen}\,x}$.

8. *a*) x^na^x; *b*) a^{2x+1}; *c*) $e^{\cos x}$.

9. *a*) a^{bx^2}; *b*) $(a + b)^x$; *c*) $e^{\mathrm{tg}\,x}$.

10. *a*) $\ln\dfrac{x}{a}$; *b*) $\ln(ax^2 + bx + c)$.

11. *a*) $\ln x^2$; *b*) $\ln(x^3 + 3)$.

12. *a*) $x\ln x$; *b*) $\ln(px + q)$.

13. *a*) $\ln(\operatorname{sen} x)$; *b*) $\ln(\cos x)$.

14. *a*) $\ln \dfrac{a+x}{a-x}$; *b*) $\ln(e^x + e^{-x})$.

15. *a*) $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$; *b*) $\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})$.

16. *a*) $\ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; *b*) $\ln \sqrt{x^2+1}$; *c*) $\dfrac{e^x}{\sqrt{x}}$.

17. *a*) $x^2 e^{4x}$; *b*) $ae^{-kx} \operatorname{sen} kx$.

18. *a*) $\dfrac{e^{ax}}{x^{7/2}}$; *b*) $\ln(\sqrt{\operatorname{sen} x})$.

19. *a*) x^x; *b*) $\ln(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})$.

20. *a*) $\ln \dfrac{e^x}{1+e^x}$; *b*) $\operatorname{sen} x \times \ln \operatorname{sen} x$.

21. *a*) $\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$; *b*) $e^{ax} \operatorname{sen}^2 x$.

22. *a*) a^{3x^2}; *b*) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

23. *a*) $\operatorname{sen}^{-1} \ln x$; *b*) $\cos^{-1} e^{-x}$.

24. *a*) $e^{ax} \cos(bx + c)$; *b*) $e^{-ax} \cos 3x$;

c) $e^{-(1/2)x} \operatorname{sen}\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

25. *a*) $\ln \dfrac{x}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$; *b*) $\operatorname{sen}^{-1} \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

26. Hallar las derivadas segunda, tercera, cuarta y *n*-ésima de

a) $y = e^{ax}$; *b*) $y = e^{-ax}$; *c*) $y = \ln x$.

9 Funciones hiperbólicas

9.1. Definiciones de funciones hiperbólicas

En la figura 8.1 se mostraron las gráficas de la función exponencial e^x y e^{-x}. Estas dos curvas se reproducen en la figura 9.1, junto con otras dos curvas marcadas con las letras A y B.

1. En la curva A la ordenada de cualquier punto sobre ella es *la mitad de la suma de las correspondientes ordenadas de* e^x *y* e^{-x}. Por ejemplo, en el punto P, su ordenada PQ es la semisuma de LQ y MQ. Así, para cada punto de la curva

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

2. En la curva B, la ordenada de cualquier punto sobre ella es *la mitad de la diferencia* de las ordenadas de las otras dos curvas. Así,

$$RQ = \frac{1}{2}(LQ - MQ)$$

Esto es, para cualquier punto

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

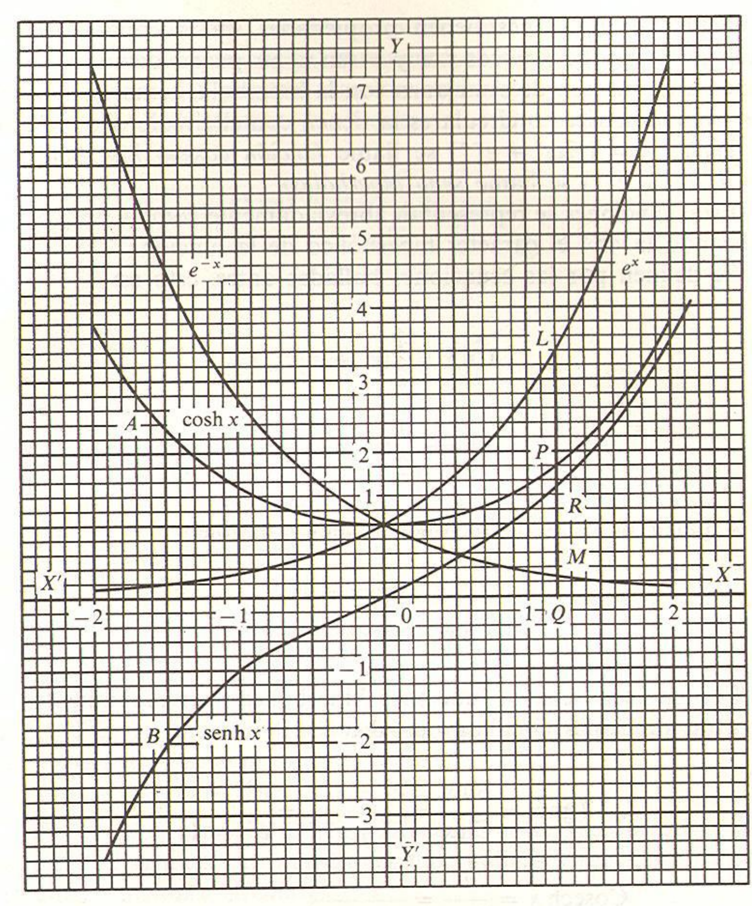


Figura 9.1.

Las dos curvas, por tanto, representan dos funciones de x, y sus ecuaciones vienen dadas por

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

y

$$y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

Estas dos funciones tienen propiedades, en muchos aspectos, análogas a las de $y = \cos x$ e $y = \operatorname{sen} x$. Se puede demostrar que tienen una relación de semejanza con la hipérbola, como las funciones trigonométricas o circulares la tienen con el círculo. De ahí que *la función* $y = 1/2(e^x + e^{-x})$ se llame *función coseno hiperbólico e* $y = 1/2(e^x - e^{-x})$ se llame *seno hiperbólico.*

Estas funciones se representan abreviadamente como $\operatorname{Ch} x$ y $\operatorname{Sh} x$, indicando la «h» el carácter hiperbólico de la función.

Se definen por las ecuaciones halladas antes, esto es:

$$\operatorname{Ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

$$\operatorname{Sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

A partir de estas definiciones, tenemos también

$$\operatorname{Ch} x + \operatorname{Sh} x = e^x$$
$$\operatorname{Ch} x - \operatorname{Sh} x = e^{-x}$$

Existen otras cuatro funciones hiperbólicas correspondientes a las otras funciones circulares, a saber:

$$\operatorname{Tgh} x = \frac{\operatorname{Sh} x}{\operatorname{Ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

$$\operatorname{Cosech} x = \frac{1}{\operatorname{Sh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{Sech} x = \frac{1}{\operatorname{Ch} x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{Ctgh} x = \frac{1}{\operatorname{Tgh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

Estas funciones se pueden también expresar en forma exponencial por derivación a partir de sus recíprocos.

La curva de $\operatorname{Ch} x$, marcada con A en la figura 9.1, es una curva

importante. Se llama *catenaria*, curva formada por una cadena uniforme flexible que cuelga libremente de sus extremos fijos.

Estas funciones pueden también expresarse en forma de series que se derivan de la serie de e^x que vimos en el apartado 8.4. Así,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

y

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Por lo que, sumando y restando, se obtiene:

$$\operatorname{Ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\operatorname{Sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

9.2. Fórmulas relacionadas con las funciones hiperbólicas

Existe una estrecha correspondencia entre las fórmulas que expresan relaciones entre funciones hiperbólicas y relaciones similares entre funciones circulares.

Consideremos los dos ejemplos siguientes:

1. $\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x$

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}[(e^{2x} + e^{-2x} + 2) - (e^{2x} + e^{-2x} + 2)] = 1$$

$$\operatorname{Ch}^2 x - \operatorname{Sh}^2 x = 1$$

Compárese esta expresión con el resultado trigonométrico

$$\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

2. $\operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x$

$$\operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{2e^{2x} + 2e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x}}{2} = \operatorname{Ch} 2x$$

Esto es,

$$\operatorname{Ch}^2 x + \operatorname{Sh}^2 x = \operatorname{Ch} 2x$$

Esto expresión es análoga a

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \cos 2x$$

Similarmente, cualquier fórmula para funciones trigonométricas tiene su contrapartida en las funciones hiperbólicas. Adviértase que en los dos casos anteriores hay una diferencia en los signos utilizados, y esto se aplica sólo a $\operatorname{Sh}^2 x$. Esto ha llevado a la formulación de la regla de Osborne, por la cual las fórmulas para las funciones hiperbólicas se pueden escribir inmediatamente a partir de las fórmulas correspondientes de las funciones trigonométricas.

Regla de Osborne

En cualquier fórmula que conecta las funciones circulares de ángulos generales, la expresión correspondiente que hace lo propio con funciones hiperbólicas se puede obtener sustituyendo cada una de las funciones trigonométricas por la correspondiente función hiperbólica, si se cambia el signo de cada producto, o producto implicado, de dos senos.

Por ejemplo:

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

se convierte en

$$\text{Sech}^2 x = 1 - \text{Tgh}^2 x$$

puesto que

$$\text{Tgh}^2 x = \frac{\text{Sh}\, x \cdot \text{Sh}\, x}{\text{Ch}\, x \cdot \text{Ch}\, x}$$

9.3. Resumen de las fórmulas

Las fórmulas correspondientes más importantes se resumen a continuación:

Funciones hiperbólicas	Funciones circulares
$\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x = 1$	$\cos^2 x + \text{sen}^2 x = 1$
$\text{Sh}\, 2x = 2\text{Sh}\, x \text{Ch}\, x$	$\text{sen}\, 2x = 2\text{sen}\, x \cos x$
$\text{Ch}\, 2x = \text{Ch}^2 x + \text{Sh}^2 x$	$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
$\text{Sech}^2 x = 1 - \text{Tgh}^2 x$	$\sec^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$
$\text{Cosech}^2 x = \text{Ctgh}^2 x - 1$	$\text{cosec}^2 x = \text{ctg}^2 x + 1$
$\text{Sh}(x \pm y) = \text{Sh}\, x \text{Ch}\, y \pm \text{Ch}\, x \text{Sh}\, y$	$\text{sen}(x \pm y) = \text{sen}\, x \cos y \pm \cos x\, \text{sen}\, y$
$\text{Ch}(x \pm y) = \text{Ch}\, x \text{Ch}\, y \pm \text{Sh}\, x \text{Sh}\, y$	$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \pm \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

Las siguientes llamativas relaciones entre los dos conjuntos de funciones se dan para información del lector. Para un tratamiento completo se debe consultar cualquier libro de trigonometría avanzada.

$$\text{Ch}\, x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \ \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$\text{Sh}\, x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}); \ \text{sen}\, x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\text{Sh}\, x = \frac{1}{i}\text{sen}\, ix$$

$$\text{Ch}\, x = \cos ix$$

donde $i = \sqrt{-1}$.

9.4. Derivadas de funciones hiperbólicas

1. Sh *x*

Sea

$$y = \text{Sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \text{Ch}\, x$$

2. Ch *x*

Sea

$$y = \text{Ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \text{Sh}\, x$$

3. Tgh *x*

Se puede hallar la derivada de esta función a partir de la definición exponencial, o se puede utilizar el resultado anterior.

Sea

$$y = \text{Tgh}\, x = \frac{\text{Sh}\, x}{\text{Ch}\, x}$$

Entonces,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{Ch}\, x\, \text{Ch}\, x - \text{Sh}\, x\, \text{Sh}\, x}{\text{Ch}^2 x} =$$

$$= \frac{\text{Ch}^2 x - \text{Sh}^2 x}{\text{Ch}^2 x}. \qquad \text{(Regla del cociente.)}$$

$$= \frac{1}{\text{Ch}^2 x} = \text{Sech}^2 x \qquad \text{(Ap. 9.2.)}$$

Similarmente, se puede demostrar que si

$$y = \text{Cosech}\, x, \quad \frac{dy}{dx} = -\text{Cosech}\, x\, \text{Ctgh}\, x$$

$$y = \text{Sech}\, x, \quad \frac{dy}{dx} = -\text{Sech}\, x\, \text{Tgh}\, x$$

$$y = \text{Ctgh}\, x, \quad \frac{dy}{dx} = -\text{Cosech}^2\, x$$

Estos resultados deben compararse con las derivadas de las funciones trigonométricas correspondientes.

9.5. Curvas de las funciones hiperbólicas

Las curvas de $\text{Ch}\, x$ y $\text{Sh}\, x$ en la figura 9.1 deben examinarse de nuevo con ayuda de sus derivadas.

1. $y = \text{Ch}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \text{Sh}\, x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \text{Ch}\, x$$

$\frac{dy}{dx}$ se hace cero sólo cuando $x = 0$. Hay, por tanto, un punto extremo en la curva A. También, puesto que $\text{Sh}\, x$ es negativo antes de este punto y positivo después, mientras que $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo, el punto es un *mínimo*. No hay ningún otro punto de extremo ni de inflexión.

2. $y = \mathrm{Sh}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Ch}\, x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \mathrm{Sh}\, x$$

$\frac{dy}{dx}$, esto es, $\mathrm{Ch}\, x$ es siempre positivo y no se hace cero. Por consiguiente, $\mathrm{Sh}\, x$ es *siempre creciente* y no tiene punto extremo. Cuando $x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, y es negativo antes y positivo después.

Por consiguiente, hay un *punto de inflexión* cuando $x = 0$; puesto que $\frac{dy}{dx}$, esto es, $\mathrm{Ch}\, x = 1$ cuando $x = 0$, el gradiente en 0 es la unidad y el ángulo es $\pi/4$.

3. $y = \mathrm{Tgh}\, x$

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{Sech}^2\, x$$

Puesto que $\mathrm{Sech}^2\, x$ es siempre positivo, $\mathrm{Tgh}\, x$ es siempre creciente entre $-\infty$ y $+\infty$. También, puesto que $\mathrm{Sh}\, x$ y $\mathrm{Ch}\, x$ son siempre continuos y $\mathrm{Ch}\, x$ nunca es cero, $\mathrm{Tgh}\, x$ debe ser una *función continua*.

Como se demostró en el apartado 9.1, $\mathrm{Tgh}\, x$ puede escribirse en la forma

$$\mathrm{Tgh}\, x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

A partir de esta forma, es evidente que mientras x aumenta de $-\infty$ a $+\infty$, e^{2x} aumenta de 0 a 1.

Entonces,

$$\mathrm{Tgh}\, x = 1 - \frac{2}{e^{2x} + 1}$$

o $\mathrm{Tgh}\, x$ aumenta de -1 a 0.

Similarmente, mientras x aumenta de 0 a $+\infty$, Tgh x aumenta de 0 a 1.

La curva, por tanto, tiene las asíntotas $y = \pm 1$ y se muestra en la figura 9.2.

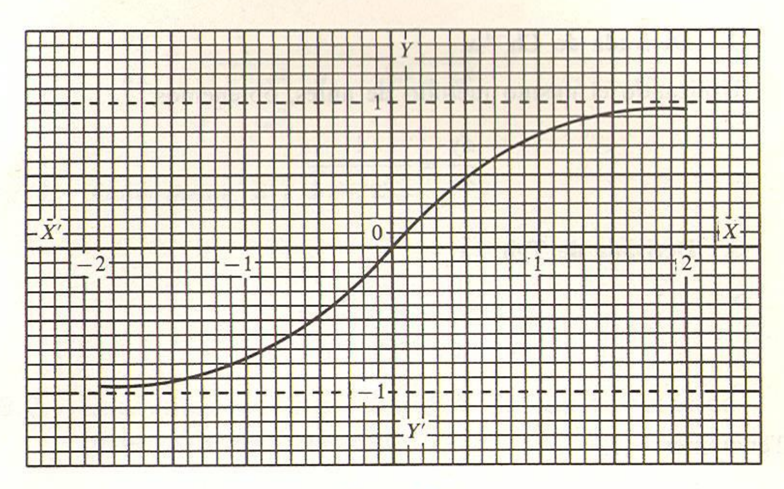


Figura 9.2.

9.6. Diferenciación de las funciones hiperbólicas inversas

Las funciones hiperbólicas inversas correspondientes a funciones trigonométricas inversas y sus derivadas se hallan por métodos similares.

1. Derivada de $\mathrm{Sh}^{-1} x$

Sea

$$y = \mathrm{Sh}^{-1} x$$

Entonces,

$$x = \mathrm{Sh}\, y$$

$$\frac{dx}{dy} = \mathrm{Ch}\, y$$

o

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{Ch}\, y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \text{Sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

2. Derivada de $\text{Ch}^{-1} x$

Utilizando el mismo método de antes, obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

3. Derivada de $\text{Tgh}^{-1} x$

Si

$$y = \text{Tgh}^{-1} x$$
$$x = \text{Tgh}\, y$$

Tendremos:

$$\frac{dx}{dy} = \text{Sech}^2 y$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{Sech}^2 y} = \frac{1}{1 - \text{Tgh}^2 y} = \frac{1}{1 - x^2} \quad \text{(Ap. 9.3.)}$$

4. Las derivadas de las funciones recíprocas de las funcio- anteriores se pueden hallar por los mismos métodos. Son las siguientes:

$$y = \text{Sech}^{-1} x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1 - x^2}}$$

$$y = \text{Cosech}^{-1} x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{1 + x^2}}$$

$$y = \text{Ctgh}^{-1} x \quad , \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 - 1}$$

La importancia de las siguientes formas se verá posteriormente:

1. Si $y = \mathrm{Sh}^{-1}\dfrac{x}{a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{a^2}}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad \text{o} \quad \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

2. Similarmente, si $y = \mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{x}{a}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

9.7. Equivalentes logarítmicos de las funciones hiperbólicas inversas

1. $\mathbf{Sh^{-1}\,x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}$

Sea

$$y = \mathrm{Sh}^{-1}\,x$$

Entonces:

$$x = \mathrm{Sh}\,y$$

Pero

$$\mathrm{Ch}^2\,y = 1 + \mathrm{Sh}^2\,y = 1 + x^2$$

$$\mathrm{Ch}\,y = \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(Ap. 9.3.)}$$

Luego

$$\mathrm{Sh}\,y + \mathrm{Ch}\,y = x + \sqrt{1 + x^2} \qquad (1)$$

Pero

$$\mathrm{Sh}\,y + \mathrm{Ch}\,y = e^y$$

$$e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \qquad \text{(Ap. 9.2.)}$$

Tomando logaritmos

$$y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$$

Esto es,

$$\mathrm{Sh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Nota. Puesto que $\mathrm{Ch}\, x$ es siempre positivo, el signo más (+) aparece sólo en (1).

2. $\mathrm{Ch}^{-1} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

Sea

$$y = \mathrm{Ch}^{-1} x$$

$$x = \mathrm{Ch}\, y$$

Pero (Ap. 9.3):

$$\mathrm{Sh}^2 y = \mathrm{Ch}^2 y - 1 = x^2 - 1$$

$$\mathrm{Sh}\, y = \sqrt{x^2 - 1}$$

(Puede llevar los dos signos, positivo y negativo.)

Al igual que antes:

$$e^y = \mathrm{Ch}\, y + \mathrm{Sh}\, y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

$$y = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

o

$$\mathrm{Ch}^{-1} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$$

Los dos valores así obtenidos son:

$$\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad \text{y} \quad \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$$

Su suma:

$$\ln(x+\sqrt{x^2-1})+\ln(x-\sqrt{x^2-1})=\ln[(x+\sqrt{x^2-1})\cdot(x-\sqrt{x^2-1})]=$$

$$=\ln[x^2-(x^2-1)]=$$

$$=\ln 1=0$$

Por tanto, los dos valores de $\mathrm{Ch}^{-1}x$ son iguales y sólo se diferencian en su signo. Así, podemos escribir:

$$\mathrm{Ch}^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

Nota. x debe estar comprendida entre 1 y $+\infty$.

3. $\mathbf{Tgh^{-1}\,x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}}$

Sea

$$y=\mathrm{Tgh}^{-1}x$$

Entonces,

$$x=\mathrm{Tgh}\,y=\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

$$x(e^{2y}+1)=e^{2y}-1$$

[x debe estar comprendida entre $+1$ y -1 (Ap. 9.5).]

De donde

$$e^{2y}=\frac{1+x}{1-x}$$

$$2y=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

y

$$y = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Esto es,

$$\mathrm{Tgh}^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

9.8. Resumen de las fórmulas de las funciones inversas

Función	Derivada
$\mathrm{Sh}^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\mathrm{Ch}^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\mathrm{Tgh}^{-1} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\mathrm{Cosech}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$
$\mathrm{Sech}^{-1} x$	$-\frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\mathrm{Ctgh}^{-1} x$	$-\frac{1}{x^2-1}$

Estas otras formas son importantes. Cuando:

$$y = \mathrm{Sh}^{-1}\frac{x}{a}\quad,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$y = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a}\quad,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$y = \mathrm{Tgh}^{-1}\frac{x}{a}\quad,\quad \frac{dy}{dx} = \frac{a}{a^2-x^2}$$

Equivalentes logarítmicos

$$\operatorname{Sh}^{-1} x = \ln (x + \sqrt{x^2 + 1})$$
$$\operatorname{Ch}^{-1} x = \pm \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$$
$$\operatorname{Tgh}^{-1} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

También:

$$\operatorname{Sh}^{-1} \frac{x}{a} = \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right)$$
$$\operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a} = \pm \ln \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$
$$\operatorname{Tgh}^{-1} \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a + x}{a - x}$$

EJERCICIOS

Diferenciar las funciones siguientes:

1. *a*) $\operatorname{Sh} \frac{x}{2}$; *b*) $\operatorname{Sh} 2x$; *c*) $\operatorname{Ch} \frac{x}{3}$.

2. *a*) $\operatorname{Tgh} ax$; *b*) $\operatorname{Tgh} \frac{x}{4}$; *c*) $\operatorname{Sh} ax + \operatorname{Ch} ax$.

3. *a*) $\operatorname{Sh} \frac{1}{x}$; *b*) $\operatorname{Sh}^2 x$; *c*) $\operatorname{Ch}^3 x$.

4. *a*) $\operatorname{Sh} (ax + b)$; *b*) $\operatorname{Ch} 2x^2$; *c*) $\operatorname{Sh}^n ax$.

5. *a*) $\operatorname{Sh} x \operatorname{Ch} x$; *b*) $\operatorname{Sh}^2 x + \operatorname{Ch}^2 x$; *c*) $\operatorname{Tgh}^2 x$.

6. *a*) $\ln \operatorname{Tgh} x$; *b*) $x \operatorname{Sh} x - \operatorname{Ch} x$; *c*) $\ln \operatorname{Ch} x$.

7. *a*) $x^3 \operatorname{Sh} 3x$; *b*) $\ln(\operatorname{Sh} x + \operatorname{Ch} x)$; *c*) $e^{\operatorname{Sh} x}$.

8. *a*) $\sqrt{\operatorname{Sh} x}$; *b*) $\ln \dfrac{1 + \operatorname{Tgh} x}{1 - \operatorname{Tgh} x}$; *c*) $e^{\operatorname{Tgh} x}$.

9. *a*) $\operatorname{Sh}^{-1} \dfrac{x}{2}$; *b*) $\operatorname{Ch}^{-1} \dfrac{x}{5}$; *c*) $\operatorname{Sh}^{-1} \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

10. *a*) $\operatorname{Sh}^{-1} \operatorname{tg} x$; *b*) $\operatorname{tg}^{-1} \operatorname{Sh} x$; *c*) $\operatorname{Tgh}^{-1} \operatorname{sen} x$.

11. *a*) $\operatorname{sen}^{-1} \operatorname{Tgh} x$; *b*) $\operatorname{Ch}^{-1} \sec x$; *c*) $\operatorname{Tgh}^{-1} \dfrac{2x}{1 + x^2}$.

12. *a*) $\operatorname{Ch}^{-1}(4x + 1)$; *b*) $\operatorname{Sh}^{-1} 2x\sqrt{1 + x^2}$; *c*) $\operatorname{Tgh}^{-1} \dfrac{1}{1 + x}$.

13. *a*) $\operatorname{tg}^{-1} x + \operatorname{Tgh}^{-1} x$; *b*) $\operatorname{Tgh}^{-1}\left(\operatorname{tg} \dfrac{1}{2} x\right)$;

c) $\operatorname{tg}^{-1}\left(\operatorname{Tgh} \dfrac{1}{2} x\right)$.

14. Escribir los equivalentes logarítmicos de:

a) $\operatorname{Sh}^{-1} \dfrac{x}{2}$; *b*) $\operatorname{Ch}^{-1} \dfrac{x}{3}$; *c*) $\operatorname{Sh}^{-1} \dfrac{2x}{3}$;

d) $\operatorname{Ch}^{-1} \dfrac{3x}{2}$; *e*) $\operatorname{Tgh}^{-1} \dfrac{x}{4}$.

15. Diferenciar:

a) $\ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$; *b*) $\ln\left(\dfrac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$;

c) $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{a + x}{a - x}$.

10 Integración. Integrales estándar

10.1. Significado de la integración

El cálculo integral se ocupa de la *operación de integración*, que, en uno de sus aspectos, es la *inversa de la diferenciación*.

Desde esta perspectiva, el problema que resuelve la integración es: *¿Cuál es la función que al ser diferenciada produce una función dada?* Por ejemplo, ¿cuál es la función que, al ser diferenciada, produce $\cos x$? En este caso sabemos, por lo que queda dicho en los capítulos precedentes acerca de la diferenciación, que $\operatorname{sen} x$ es la función buscada. Concluimos, por tanto, que $\operatorname{sen} x$ *es la integral de* $\cos x$.

En general, si $f'(x)$ representa la derivada de $f(x)$, entonces el problema de la integración es, dado $f'(x)$, hallar $f(x)$; o dado dy/dx, hallar y.

Pero el proceso de hallar la integral raramente es tan simple como en este ejemplo. Una operación inversa es normalmente más difícil que la directa, y la integración no es una excepción. Un buen dominio de la diferenciación será de gran ayuda en muchos casos, como en los casos anteriores, pero, aun cuando el tipo de función sea conocida, pueden surgir algunas complicaciones en los signos y las constantes.

Por ejemplo, si se quiere hallar la integral de $\operatorname{sen} x$, sabemos que $\cos x$, cuando se diferencia, produce $-\operatorname{sen} x$. Concluimos, por tanto, que la función que produce $+\operatorname{sen} x$, al ser diferenciada, debe ser $-\cos x$. Por tanto, la integral de $\operatorname{sen} x$ es $-\cos x$.

Supongamos, nuevamente, que queremos hallar la integral de x.

Sabemos que la función que produce x por diferenciación debe tener la forma x^2. Pero $d/dx(x^2) = 2x$. Si, por tanto, el resultado de la diferenciación debe ser x, la integral debe contener un factor constante de x tal que se elimine con el 2 de $2x$. Claramente, esta constante debe ser 1/2. De ahí que la integral deba ser $1/2x^2$.

Estos dos sencillos ejemplos pueden ayudar a caer en la cuenta de algunas de las dificultades con las que se enfrenta el cálculo integral. En el cálculo diferencial, conociendo las reglas formuladas en los capítulos anteriores, es posible diferenciar no sólo todos los tipos ordinarios de funciones, sino también expresiones complicadas formadas por productos, cocientes, potencias, logaritmos, etc., de estas funciones. Pero hay que simplificar, eliminar y efectuar otras operaciones antes de llegar a la forma final de una derivada. Cuando se invierte el proceso, como ocurre en la integración, para conocer la función original, ordinariamente es imposible invertir todos estos procesos, y en muchísimos casos la integración no puede llevarse a efecto.

No es posible, por tanto, formular un conjunto de reglas por las que una función cualquiera pueda ser integrada. Sin embargo, se han diseñado diversos métodos para integrar ciertos tipos de funciones, y esos métodos se irán presentando en los capítulos siguientes. Conociendo estos métodos y con mucha práctica, si se tiene un buen dominio de la diferenciación, será posible integrar la mayoría de las funciones que se presenten. Estos métodos, en general, consisten en transponer y manipular las funciones de tal manera que adopten la forma conocida de funciones estándar de las que se conocen sus integrales. La solución final es cuestión sólo de reconocimiento e inspección.

La integración tiene una ventaja: el resultado se puede siempre comprobar. Si la función obtenida por integración se diferencia, se debe obtener la función original. *El lector no debe omitir esta comprobación.*

10.2. La constante de integración

Cuando se diferencia una función que contiene un término *constante*, dicho término constante desaparece, puesto que su derivada es cero.

Cuando invertimos el proceso e integramos, la constante no se puede determinar sin más. Por ejemplo, sea

$$y = x^2 + 3$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Si invertimos ahora el proceso e integramos $2x$, el resultado es x^2. Consiguientemente, para obtener una integral completa, se debe añadir una constante desconocida.

Sea C la constante en el ejemplo anterior. Entonces, podemos decir que la integral de $2x$ es $x^2 + C$, donde C es una *constante indeterminada*. Por consiguiente, la integral se llama *integral indefinida*.

Esto se puede ilustrar gráficamente de la siguiente manera. En la figura 10.1 se representan las gráficas de $y = x^2$, $y = x^2 + 2$, $y = x^2 - 3$, todas las cuales se incluyen en la forma general $y = x^2 + C$. Se denominan *curvas integrales*, puesto que representan las curvas de la integral $x^2 + C$, cuando se asignan a C los valores 0, $+2$ y -3. Evidentemente, existe un número infinito de estas curvas.

Sean P, Q y R puntos de esas curvas cortadas por la ordenada $x = 1{,}5$.

En estos tres puntos, *la pendiente es la misma*. Tienen el mismo coeficiente, $2x$, que para estos puntos tiene el valor 3.

La integral $y = x^2 + C$ representa, por tanto, una serie de curvas correspondientes que tienen *la misma pendiente en puntos con la misma abscisa*.

La ecuación de una curva particular cualquiera en la serie puede hallarse cuando se conoce un par de valores correspondientes de x o y. Esto nos permite hallar C. Si, por ejemplo, una curva pasa por el punto $(3, 6)$, estos valores de x e y pueden ser sustituidos en la ecuación. Así, sustituyendo en

$$y = x^2 + C$$

tenemos

$$6 = 3^2 + C$$

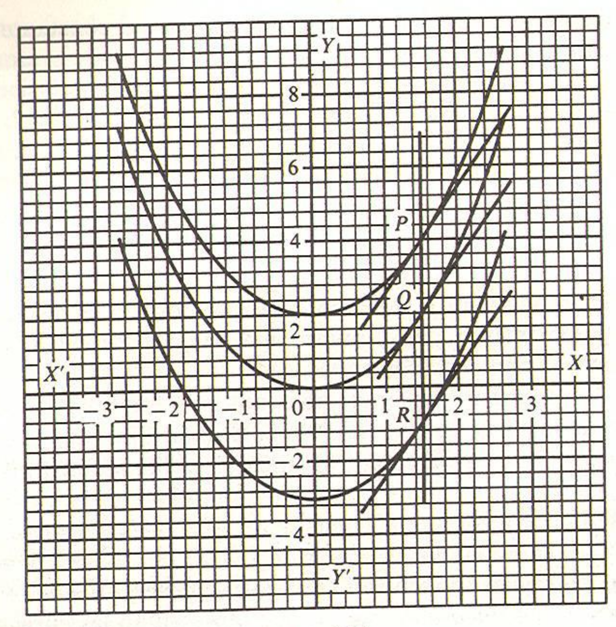


Figura 10.1.

De donde

$$C = -3$$

Por tanto, $y = x^2 - 3$ es la ecuación de esta curva particular en el conjunto de curvas $y = x^2 + C$.

10.3. El símbolo de integración

La operación de integración necesita un símbolo. Para indicarla se ha escogido $\int$, que es una «S» alargada y que se ha seleccionado por ser la primera letra de la palabra «suma», que, como vamos a ver, es otro aspecto de la integración.

El símbolo diferencial dx se escribe al lado de la función a integrar para indicar la variable independiente respecto a la cual se ha efectuado la diferenciación original y respecto a la cual vamos a integrarla.

Así, $\int f(x)dx$ significa que $f(x)$ se ha de integrar respecto a x.

El ejemplo de la integración de $\cos x$ que se consideró en el apartado 10.1 se escribiría de la forma siguiente:

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

Es importante recordar que las variables en la función que se va a integrar y en la diferencial deben ser las mismas. Así, $\int \cos y dx$ no se puede hallar tal como está. Sería primero necesario, si fuera posible, expresar $\cos y$ como una función de x.

Nota. Se puede usar cualquier otra letra para representar la variable independiente, además de x. Así, $\int t dt$ indica que t es la variable independiente y que debemos integrar esta función respecto a ella.

10.4. Integración de un factor constante

En el apartado 4.9 se ha demostrado que, cuando una función contiene un número constante como un factor, este número será un factor de la derivada de la función. Así, si

$$y = ax^n$$

$$\frac{dy}{dx} = a(nx^{n-1})$$

De lo dicho en el apartado 4.9 resulta también igualmente claro que, cuando se invierte la operación e integramos una función que contiene un factor constante, este factor debe ser también un factor de la integral final.

Al hallar una integral es mejor transferir dicho factor al lado izquierdo del signo de integración antes de proceder a la integración de la función. Así:

$$\int 5x dx = 5\int x dx = 5\left(\frac{1}{2}x^2\right) + C = \frac{5}{2}x^2 + C$$

Generalmente:

$$\int af'(x)dx = a\int f'(x)dx$$

Debe advertirse que no se puede transferir al otro lado del signo de integración ningún factor que contenga la variable.

10.5. Integración de x^n

Se pueden obtener ejemplos sencillos de lo que acabamos de decir, por simple inspección. Así:

$$\int xdx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\int x^2dx = \frac{1}{3}x^3 + C$$

$$\int x^3dx = \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$\int x^4dx = \frac{1}{5}x^5 + C$$

A partir de estos ejemplos podemos deducir fácilmente que:

$$\int x^ndx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

También, de acuerdo con la regla dada en el apartado 10.4:

$$\int ax^ndx = a\int x^ndx = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + C$$

Recordando la regla para la diferenciación de una función, podemos también deducir que

$$\int (ax + b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)}(ax + b)^{n+1} + C$$

Si al lector le resultara difícil entender un resultado como éste, podrá entender la razón del mismo diferenciando la integral obtenida.

Se vio en el apartado 4.8 que la regla para la diferenciación de x^n es válida para todos los valores de n. La fórmula anterior para la integración de la función vale similarmente para todos los valores del exponente salvo para $n = -1$.

Nota. Adviértase que $\int dx = x + C$.

Ejemplos resueltos

1. $\displaystyle\int 3x^7 dx = 3\int x^7 dx = 3\cdot\frac{x^8}{8} + C = \frac{3}{8}x^8 + C.$

2. $\displaystyle\int 4\sqrt{x}\,dx = 4\int x^{1/2} dx = 4\cdot\frac{x^{(1/2)+1}}{1/2 + 1} + C =$

$$= 4\cdot\frac{2}{3}x^{3/2} + C = \frac{8}{3}x^{3/2} + C.$$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{x^{1/2}} = \int x^{-1/2} dx = \frac{x^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2} + 1} + C =$

$$= 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C.$$

Nota. Esta última integral y las de las siguientes funciones relacionadas deben considerarse cuidadosamente:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x + b}} = 2\sqrt{x + b} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax + b}} = \frac{2}{a}\sqrt{ax + b} + C$$

10.6. Integración de una suma

Resulta evidente, de la consideración de la diferenciación de una suma de varias funciones (Ap. 5.1), que al invertir el proceso vale la misma regla para la integración, esto es, *la integral de una suma de diversas funciones es igual a la suma de las integrales de esas funciones.*

Ejemplos resueltos

1. Sea

$$\int (x^3 - 5x^2 + 7x - 11)dx =$$

$$= \int x^3 dx - 5\int x^2 dx + 7\int x dx - 11\int dx =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 11x + C$$

Nota. Todas las constantes que surjan de la integración de los términos separados se pueden incluir en *una* constante, puesto que esta constante es arbitraria e indeterminada.

2. Sea

$$\int\left(\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx = \int x^{1/3}dx - \int x^{-1/3}dx =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{3}+1}x^{1/3+1} - \frac{1}{-\frac{1}{3}+1}x^{(-1/3)+1} + C =$$

$$= \frac{3}{4}x^{4/3} - \frac{3}{2}x^{2/3} + C$$

10.7. Integración de 1/*x*

Si se aplica la regla para la integración de x^n al caso de $1/x$ o x^{-1}, tenemos:

$$\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \frac{x^{-1+1}}{-1+1} + C = \frac{x^0}{0} + C = \frac{1}{0} + C$$

Este resultado es aparentemente infinito, y la regla no parece aplicable. Dejamos esta aparente contradicción para una explicación ulterior, aunque debe recordarse que en estos procesos estamos tratando con límites.

Sabemos, sin embargo, que por la regla para la diferenciación de una función logarítmica (Ap. 8.8) la derivada de $\ln x$ es $1/x$.

Así, concluimos que

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$$

10.8. Una regla útil de integración

Combinando con este último resultado la regla de diferenciación para una función de función, tenemos:

$$y = \ln [f(x)]$$

Si

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Por consiguiente:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$$

De ahí que, *cuando se integra una función fraccionaria en la que, tras un ajuste conveniente de las constantes, si fuera necesario, se ve que el numerador es la derivada del denominador, entonces la integral es el logaritmo neperiano del denominador.*

Claramente, todas las funciones fraccionarias de x en las que el denominador es una función de primer grado pueden integrarse por esta regla mediante un ajuste adecuado de constantes.

Ejemplos resueltos

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax} = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax}\,dx = \frac{1}{a}\ln ax + C.$

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b) + C.$

3. $\displaystyle\int \frac{xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\int \frac{4xdx}{2x^2+3} = \frac{1}{4}\ln(2x^2+3) + C.$

4. $\displaystyle\int \frac{2(x+1)dx}{x^2+2x+7} = \int \frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+7} = \ln(x^2+2x+7).$

5. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\ln\cos x + C.$

Esto es:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \ln\sec x + C$$

6. $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,dx.$

$\displaystyle\int \operatorname{ctg} x dx = \ln\operatorname{sen} x + C.$

7. $\displaystyle\int \frac{6x+5}{3x^2+5x+1}\,dx = \ln(3x^2+5x+1) + C.$

8. $\displaystyle\int (x+2)(2x-1)dx.$

Aunque existe una regla para la diferenciación del producto de dos funciones, no hay ninguna para la integración de un producto, como

en el ejemplo anterior. En tal caso los factores deben ser multiplicados. Entonces:

$$\int (x+2)(2x-1)dx = \int (2x^2+3x-2)dx =$$

$$= 2\int x^2dx + 3\int xdx - 2\int dx =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$$

9. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^3}dx.$

En este ejemplo empleamos un procedimiento que utilizaremos posteriormente en casos más complejos; la fracción se desdobla en sus fracciones componentes, dividiendo cada término del numerador por el denominador. Entonces:

$$\int \frac{x^4+3x^2+1}{x^3}dx = \int \left(x + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right)dx =$$

$$= \int xdx + 3\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{dx}{x^3} =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 + 3\ln x - \frac{1}{2x^2} + C$$

10.9. Si $\frac{d^2y}{dx^2} = x^3$, expresar y en función de x

Puesto que d^2y/dx^2 es la derivada de dy/dx, se sigue que por integración de d^2y/dx^2 obtenemos dy/dx. Tras hallar así dy/dx, una segunda integración nos dará la ecuación que conecta y y x.

Puesto que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x^3$$

integrando:

$$\frac{dy}{dx} = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + C_1$$

Integrando otra vez:

$$y = \int\left(\frac{1}{4}x^4 + C_1\right)dx = \int\frac{1}{4}x^4 dx + \int C_1 dx =$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{1}{5}x^5 + C_1x + C_2$$

$$y = \frac{1}{20}x^5 + C_1x + C_2$$

Al integrar dos veces, se introducen dos constantes que se distinguen como C_1 y C_2.

Para hallar estas constantes es necesario tener dos pares de valores correspondientes de x e y. Al sustituir estos valores, obtenemos dos ecuaciones simultáneas que contienen C_1 y C_2 como dos incógnitas. Resolviendo estas ecuaciones, se sustituyen los valores hallados en la ecuación

$$y = \frac{1}{20}x^5 + C_1x + C_2$$

y así la ecuación que conecta x e y se resuelve totalmente.

10.10. Integrales de formas estándar

Recogemos a continuación diversas integrales conocidas como *formas estándar*, que se obtienen principalmente observando que son

derivadas conocidas de funciones. Ya hemos utilizado algunas de ellas antes.

***a*) Funciones algebraicas**

1. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x.$

3. $\int a^x dx = a^x \ln e.$

4. $\int e^x dx = e^x.$

***b*) Funciones trigonométricas**

5. $\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x.$

6. $\int \cos x dx = \operatorname{sen} x.$

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x = \ln \sec x$ (Ap. 10.8).

8. $\operatorname{ctg} x dx = \ln \operatorname{sen} x$ (Ap. 10.8).

Nota. Las derivadas de $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ (a saber, $\sec x \operatorname{tg} x$ y $\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x$) no dan lugar a integrales de formas estándar, sino a productos de estas integrales. Por tanto, no se incluyen en la lista anterior, sino que se ponen en una sección posterior. Las integrales de $\sec x$ y $\operatorname{cosec} x$ no surgen por diferenciación directa y las veremos posteriormente (Ap. 11.2.1).

c) **Funciones hiperbólicas**

9. $\int \text{Sh}\, x dx = \text{Ch}\, x.$

10. $\int \text{Ch}\, x dx = \text{Sh}\, x.$

11. $\int \text{Tgh}\, x dx = \ln \text{Ch}\, x$ (utilizando el método del apartado 10.8).

12. $\int \text{Ctgh}\, x dx = \ln \text{Sh}\, x$ (utilizando el método del apartado 10.8).

Nota. Se deben observar cuidadosamente las siguientes variaciones de las funciones anteriores:

$$\int \text{sen}\, ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$$

$$\int \text{sen}\,(ax + b) dx = -\frac{1}{a} \cos (ax + b)$$

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \text{sen}\, ax$$

$$\int \cos (ax + b) dx = \frac{1}{a} \text{sen}\,(ax + b)$$

$$\int \text{tg}\, ax dx = \frac{1}{a} \ln \sec ax$$

$$\int \text{Sh}\, ax dx = \frac{1}{a} \text{Ch}\, ax$$

$$\int \text{Ch}\, ax dx = \frac{1}{a} \text{Sh}\, ax$$

10.11. Otras integrales estándar

Además de las anteriores integrales de forma estándar, son importantes las siguientes integrales, que se obtienen por diferenciación de formas estándar, especialmente las de los números 17-25.

a) **Trigonométricas**

13. $\int \sec x \operatorname{tg} x dx = \sec x.$

14. $\int \operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x dx = -\operatorname{cosec} x.$

15. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x.$

16. $\int \sec^2 x = \operatorname{tg} x.$

b) **Trigonométricas inversas**

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } -\cos^{-1}\frac{x}{a}\right).$

18. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } -\frac{1}{a}\operatorname{ctg}^{-1}\frac{x}{a}\right).$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } -\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\frac{x}{a}\right).$

c) **Funciones hiperbólicas inversas**

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Sh}^{-1}\frac{x}{a} \left[\text{o } \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)\right].$

21. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a} \left[\text{o } \ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right].$

22. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tgh}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{a + x}{a - x}\right).$

23. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\mathrm{Ctgh}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{x - a}{x + a}\right).$

24. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Sech}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$

25. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Cosech}^{-1}\frac{x}{a} \left(\text{o } -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right).$

Las siguientes variaciones de los números 20-25 son muy útiles, especialmente en algunas de las aplicaciones del capítulo siguiente:

20'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 + a^2}} = \frac{1}{b}\mathrm{Sh}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{b}\ln\left[\frac{bx + \sqrt{b^2x^2 + a^2}}{a}\right].$

21'. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{b}\mathrm{Ch}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2}}{a}\right).$

22'. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{ba}\ \mathrm{Tgh}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{2ba}\ln\frac{a + bx}{a - x}.$

23'. $\displaystyle\int \frac{dx}{b^2x^2 - a^2} = \frac{1}{ba}\ \mathrm{Ctgh}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{2ba}\ln\frac{bx - a}{bx + a}.$

24'. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Sech}^{-1}\frac{bx}{a} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2x^2}}{bx}.$

25'. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Cosech}^{-1}\frac{bx}{a} = -\frac{1}{a}\ln\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2x^2}}{bx}.$

Notas. 1) En las fórmulas 20, 21, 20′ y 21′ se omite la a que aparece en el denominador del logaritmo. Esto significa que $\ln a$ se engloba en la constante de integración. 2) En las fórmulas 17-25, si $a = 1$, obtenemos las formas más simples definidas en los apartados 7.16 y 9.5. 3) Las fórmulas 17-25 se darán directamente en un capítulo posterior. 4) En las integrales trigonométricas ayudará recordar que siempre que el nombre de la función en la integral resultante comienza con «co», la función es negativa.

Ejemplos resueltos

1. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}}$.

La forma de esta integral se puede convertir en la integral del número 17:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}} = \int \frac{dx}{3\sqrt{(16/9) - x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(16/9) - x^2}}$$

Ésta está ahora en la forma del número 17, donde $a = 4/3$. Por tanto,

$$\frac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{(16/9) - x^2}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^{-1}\left(x \div \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^{-1}\frac{3x}{4}$$

2. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 1}}$.

La forma es la del número 21′, donde $b = 3$, $a = 1$. De ahí:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 - 1}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{Ch}^{-1}\,3x = \frac{1}{3}(\ln 3x + \sqrt{9x^2 - 1})$$

3. Calcular la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$.

Ésta se puede transformar en la del número 18. Así:

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 4} = \int \frac{dx}{9(x^2 + 4/9)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2 + (2/3)^2}$$

Luego, por la integral del número 18:

$$\left(\frac{1}{9} \times \frac{1}{2/3}\right)\mathrm{tg}^{-1}\frac{x}{2/3} = \left(\frac{1}{9} \times \frac{3}{2}\right)\mathrm{tg}^{-1}\frac{3x}{2} = \frac{1}{6}\mathrm{tg}^{-1}\frac{3x}{2}$$

EJERCICIOS

Hallar las integrales siguientes (las constantes de integración han de aparecer siempre formalmente, aunque las omitamos en lo que sigue por comodidad):

1. $\int 3x dx.$ **2.** $\int 5x^2 dx.$

3. $\int \frac{1}{2}x^3 dx.$ **4.** $\int 0{,}4x^4 dx.$

5. $\int 12x^8 dx.$ **6.** $\int 15t^2 dt.$

7. $\int \frac{dx}{2}.$ **8.** $\int d\theta.$

9. $\int (4x^2 - 5x + 1)dx.$ **10.** $\int (3x^4 - 5x^3)dx.$

11. $\int x\left(8x - \frac{1}{2}\right)dx.$ **12.** $\int 6x^2(x^2 + x)dx.$

13. $\int [(x - 3)(x + 3)]dx.$ **14.** $\int [(2x - 3)(x + 4)]dx.$

15. $\int \frac{dx}{x^2}$.

16. $\int 3x^{-4}dx$.

17. $\int \frac{dx}{x^{1,4}}$.

18. $\int \sqrt[3]{x}\,dx$.

19. $\int \frac{1}{2}x^{-1/2}dx$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

21. $\int (x^{1/2} + x^{-1/2})dx$.

22. $\int (x^{2/3} + 1 + x^{-2/3})dx$.

23. $\int \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}dx$.

24. $\int \left(\frac{\pi}{2} - 5x^{-0,5}\right)dx$.

25. $\int g\,dt$.

26. $\int \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1\right)dx$.

27. $\int \sqrt{t}\,dt$.

28. $\int \left(2 - \frac{1}{3}x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$.

29. $\int \frac{1,4}{x}dx$.

30. $\int \frac{dx}{x+3}$.

31. $\int \frac{dx}{ax+b}$.

32. $\int \left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2}\right)dx$.

33. $\int \frac{2x\,dx}{x^2+4}$.

34. $\int \frac{dx}{3-2x}$.

35. $\int \frac{x+3}{x}dx$.

36. $\int \frac{x^3-7}{x}dx$.

37. $\int \frac{x^2-x+1}{x^3}dx$.

38. $\int \sqrt{ax+bdx}$.

39. $\int \sqrt{2x+3}dx$.

40. $\int \sqrt{1+\frac{x}{2}}dx$.

41. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}}$.

42. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

43. $\int (ax+b)^2 dx$.

44. $\int x(1+x)(1+x^2)dx$.

45. $\int \frac{xdx}{x^2-1}$.

46. $\int \frac{\operatorname{sen} ax dx}{1+\cos ax}$.

47. $\int \frac{e^{3x}dx}{e^{3x}+6}$.

48. $\int \frac{1+\cos 2x dx}{2x+\operatorname{sen} 2x}$.

49. Si $\frac{d^2y}{dx^2} = 3x^2$, hallar y en función de x.

50. Si $\frac{dy}{dx} = 6x^2$, hallar y en función de x, cuando $y = 5$ si $x = 1$.

51. Si $\frac{d^2y}{dx^2} = 5x$, hallar y en función de x cuando se sabe que si $x = 2$, $\frac{dy}{dx} = 12$, y cuando $x = 1$, $y = 1$.

52. La pendiente de una curva viene dada por $\frac{dy}{dx} = 4x - 5$. Cuando $x = 1$, se sabe que $y = 3$. Hallar la ecuación de la curva.

53. La pendiente de una curva viene dada por $\frac{dy}{dx} = 9x^2 - 10x + 4$. Si la curva pasa por el punto $(1, 6)$, encontrar su ecuación.

54. Si $\frac{d^2s}{dt^2} = 8t$, hallar s en función de t cuando se sabe que si $t = 0$, $s = 10$ y $\frac{ds}{dt} = 8$.

Hallar las integrales siguientes:

55. $\int 3e^{2x}dx.$

56. $\int e^{3x-1}dx.$

57. $\int (e^x + e^{-x})^2 dx.$

58. $\int e^{x/a}dx.$

59. $\int (e^{x/2} + e^{-x/2})dx.$

60. $\int (e^{ax} - e^{-ax})dx.$

61. $\int (e^{3x} + a^{3x})dx.$

62. $\int 2^x dx.$

63. $\int 10^{3x}dx.$

64. $\int (a^x + a^{-x})dx.$

65. $\int xe^{x^2}dx.$

66. $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx.$

67. $\int \operatorname{sen} 3x dx.$

68. $\int \cos 5x dx.$

69. $\int \operatorname{sen} \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx.$

70. $\int \cos(2x + \alpha)dx.$

71. $\int \operatorname{sen} \frac{1}{3} x dx.$

72. $\int \operatorname{sen}(\alpha - 3x)dx.$

73. $\int (\cos ax + \operatorname{sen} bx)dx.$

74. $\int \operatorname{sen} 2ax dx.$

75. $\int \left(\cos 3x - \operatorname{sen} \frac{x}{3} \right) dx.$

76. $\int \frac{1 + \cos x}{x + \operatorname{sen} x} dx.$

77. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos x dx.$

78. $\int \sec^2 x e^{\operatorname{tg} x} dx.$

79. $\int (\operatorname{tg} ax + \operatorname{ctg} bx) dx.$

80. $\int \frac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx.$

81. $\int \operatorname{Ch} 2x dx.$

82. $\int \operatorname{Sh} \frac{ax}{2} dx.$

83. $\int \operatorname{Tgh} 3x dx.$

84. $\int [\operatorname{sen}(a + bx) - \cos(a - bx)] dx.$

85. $\int \frac{(e^x + 1)^2}{\sqrt{e^x}} dx.$

86. $\int \operatorname{tg} \frac{3x}{2} dx.$

87. $\int \sec^2 \frac{x}{3} dx.$

88. $\int \frac{e^x}{1 + e^x} dx.$

89. $\int \frac{\sec^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} dx.$

90. $\int \cos x \sqrt{\operatorname{sen} x} dx.$

91. *a*) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$; *b*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$; *c*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

92. *a*) $\int \frac{dx}{9 + x^2}$; *b*) $\int \frac{dx}{9 - x^2}$; *c*) $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$.

93. *a*) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$; *b*) $\int \frac{dx}{16 - x^2}$.

94. *a*) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}$; *b*) $\int \frac{dx}{x^2 - 16}$.

95. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+16}$.

96. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-25}}$; *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+25}}$.

97. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2+9}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{9-4x^2}$; *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

98. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2+4}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2+4}}$; *c)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-4}}$.

99. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{49x^2+25}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+5}}$.

100. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x^2}}$.

101. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{5+4x^2}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{25-4x^2}$.

102. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+36}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

103. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

104. *a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$; *b)* $\displaystyle\int \frac{(x+1)dx}{x\sqrt{x^2-9}}$.

11 Algunos métodos elementales de integración

Este capítulo contiene algunas de las reglas y procedimientos de integración a los que nos referíamos en el apartado 10.1. La finalidad general de los mismos será no la integración directa, sino obtener transformaciones de la función a integrar de tal manera que ésta adopte la forma de una de las integrales estándar conocidas, dadas en el capítulo anterior.

11.1. Transformaciones de funciones trigonométricas

Ciertas fórmulas trigonométricas se pueden usar frecuentemente para transformar productos o potencias de funciones trigonométricas en sumas de otras funciones, cuando las reglas del apartado 10.6 o 10.8 se pueden emplear para encontrar una solución. Ejemplos de esta clase se dieron en los ejemplos 5 y 6 del apartado 10.8, en los que cambiando $\operatorname{tg} x$ por $\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ y $\operatorname{ctg} x$ por $(\cos x)/(\operatorname{sen} x)$, se hallan las integrales $\int \operatorname{tg} x dx$ y $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Entre las fórmulas más corrientemente empleadas se encuentran las siguientes:

1. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

2. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$.

De ahí,

$$\int \operatorname{sen}^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \right)$$

De igual modo:

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \right)$$

Adviértase que la fórmula utilizada en cada caso nos permite transformar una potencia de una función en una suma, y la integración es entonces inmediata. He aquí dos ejemplos más de lo mismo:

3. $\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1.$

Luego

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1)dx = \operatorname{tg} x - x$$

4. $\operatorname{ctg}^2 x$. Por el mismo procedimiento:

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1)dx = -(\operatorname{ctg} x + x)$$

5. $\int \operatorname{sen}^3 x dx$. Esta integral se puede calcular empleando la regla:

$$\operatorname{sen} 3A = 3 \operatorname{sen} A - 4 \operatorname{sen}^3 A$$

de donde

$$\operatorname{sen}^3 A = \frac{1}{4}(3 \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} 3A)$$

La integral se puede ahora escribir:

$$\int \operatorname{sen}^3 x dx = \int \frac{1}{4}(3 \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x) dx = \frac{-3}{4} \cos x + \frac{1}{12} \cos 3x$$

6. $\int \cos^3 x dx$. El método es el mismo del número 5, utilizando

$$\cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A$$

Las siguientes fórmulas son útiles para transformar productos de senos y cosenos en sumas de estas funciones:

a) $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)]$.

b) $\cos A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) - \operatorname{sen}(A - B)]$.

c) $\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A + B) + \cos(A - B)]$.

d) $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$.

Ejemplos resueltos

1. Calcular la integral $\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} dx$.

Reagrupando:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} dx - \int \frac{\operatorname{sen} x \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \sec x \operatorname{tg} x dx - \int \operatorname{sen} x dx =$$

$$= \sec x + \cos x$$

2. Integrar $\int \operatorname{sen} 3x \cos 4x dx$.

Utilizando la fórmula *b*) anterior:

$$\int \cos 4x \operatorname{sen} 3x dx = \int \frac{1}{2}[(\operatorname{sen}(4x + 3x) - \operatorname{sen}(4x - 3x)] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} 7x dx - \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x + \cos x\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos x - \frac{1}{7}\cos 7x\right)$$

11.2. Integración por sustitución

A veces es posible, cambiando la variable independiente, transformar una función en otra que se puede integrar fácilmente. La experiencia indicará la forma particular de sustitución más efectiva, pero hay algunas formas fácilmente reconocibles para las que se pueden emplear ciertas sustituciones conocidas.

Las funciones irracionales se pueden tratar frecuentemente de esta forma, como se verá en los ejemplos siguientes, y las que se emplean aquí sirven para demostrar algunas de las integrales estándar dadas en el apartado 10.11.

11.2.1. Algunas sustituciones trigonométricas e hiperbólicas

1. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

La forma de esta función sugiere que si reemplazamos x por $a \operatorname{sen} \theta$, obtenemos $a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta$, esto es, $a^2(1 - \operatorname{sen} \theta)$. Esto es igual a

$a^2 \cos^2 \theta$; extrayendo la raíz cuadrada, la cantidad irracional desaparece.

Se verá que nos quedan dos variables independientes, x y θ, puesto que dx queda como parte de la integral. Pero debemos tener la misma variable en la integral. Por consiguiente,

dx debe expresarse en función de θ

Puesto que

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

Diferenciando respecto a θ:

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta$$

que podemos escribir como

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

La solución, por tanto, será la siguiente. Integrar

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$$

Sea:

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

Entonces:

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \cdot a \cos \theta d\theta =$$

$$= \int a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} \cdot a\cos\theta d\theta =$$

$$= a^2 \int \cos^2\theta d\theta =$$

$$= a^2\left[\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{1}{2}a\operatorname{sen}\theta \cdot a\cos\theta \qquad \text{(Ap. 11.1.)}$$

Ahora hay que cambiar la variable θ por x (ya que $\operatorname{sen} 2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$). Puesto que

$$x = a\operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a}$$

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

También

$$a\cos\theta = a\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Por tanto, sustituyendo en

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}a^2\theta + \frac{1}{2}a\operatorname{sen}\theta \cdot a\cos\theta$$

obtenemos

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

Nota. En vez de sustituir $x = a\operatorname{sen}\theta$, hubiéramos podido poner igualmente $x = a\cos\theta$. Encontrar la solución, como ejercicio práctico.

2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

Utilizando la misma sustitución que en el caso anterior,

$$x = a \operatorname{sen} \theta$$

tenemos

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$$

y

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{a \cos \theta d\theta}{a \cos \theta} = \int d\theta = \theta = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \quad \text{(Ap. 10.11.)}$$

3. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$

Para esta integral empleamos funciones hiperbólicas. Sea

$$x = a \operatorname{Ch} z$$

Entonces:

$$z = \operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a}$$

A partir de

$$\operatorname{Ch}^2 z - \operatorname{Sh}^2 z = 1 \quad \text{(Ap. 9.2.)}$$

y

$$\text{Sh}\, z = \sqrt{\text{Ch}^2 z - 1} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

También, puesto que

$$x = a\,\text{Ch}\, z \quad ; \quad dx = a\,\text{Sh}\, z dz$$

Luego

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \int \sqrt{a^2\,\text{Ch}^2 z - a^2} \cdot a\,\text{Sh}\, z dz =$$

$$= \int a\sqrt{\text{Sh}^2 z} \cdot a\,\text{Sh}\, z dz =$$

$$= a^2 \int \text{Sh}^2 z dz =$$

$$= a^2 \int \frac{1}{2}(\text{Ch}\, 2z - 1)dz = \qquad \text{(Ap. 9.3.)}$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\text{Sh}\, 2z - z\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4}\text{Sh}\, 2z - \frac{a^2}{2}z =$$

$$= \frac{a^2}{4} 2\,\text{Sh}\, z\,\text{Ch}\, z - \frac{a^2}{2}z =$$

$$= \frac{1}{2}(a\,\text{Sh}\, z \cdot a\,\text{Ch}\, z) - \frac{a^2}{2}z =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 - a^2} \cdot x) - \frac{a^2}{2}\text{Ch}^{-1}\frac{x}{a}$$

(A partir de lo anterior.)

Por tanto,

$$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\text{Ch}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\left\{ \text{o } \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\left[\ln\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)\right]\right\} \quad \text{(Ap. 9.7.)}$$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

Como en el caso de la integral precedente, sea

$$x = a\,\text{Ch}\,z$$

Utilizando las equivalencias encontradas antes:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{1}{a\,\text{Sh}\,z} \cdot a\,\text{Sh}\,z dz = \int dz = z$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \text{Ch}^{-1}\frac{x}{a} \quad \left(\text{o } \ln\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right) \quad \text{(Ap. 10.11, núm. 21.)}$$

5. $\displaystyle\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx$

Sea

$$x = a\,\text{Sh}\,z \quad ; \quad dx = a\,\text{Ch}\,z dz$$

y

$$z = \text{Sh}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{y} \quad \text{Ch}\,z = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2}$$

Sustituyendo:

$$\int \sqrt{(x^2 + a^2)}dx = \int a\sqrt{\mathrm{Sh}^2 z + 1} \cdot a \,\mathrm{Ch}\, z dz =$$

$$= \int a \,\mathrm{Ch}\, z \cdot a \,\mathrm{Ch}\, z dz =$$

$$= a^2 \int \mathrm{Ch}^2 z dz = \frac{a^2}{2}\int (\mathrm{Ch}\, 2z + 1)dz =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sh}\, 2z + z\right) =$$

$$= \frac{a^2}{4} \cdot 2\,\mathrm{Sh}\, z \,\mathrm{Ch}\, z + \frac{a^2}{2} z =$$

$$= \frac{1}{2} a \,\mathrm{Sh}\, z \cdot a \,\mathrm{Ch}\, z + \frac{a^2}{2} z$$

Luego

$$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\mathrm{Sh}^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\left(\text{o } \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$$

6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$

Como antes, sea

$$x = a \,\mathrm{Sh}\, z$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \operatorname{Ch} z dz}{a \operatorname{Ch} z} = \int dz = z$$

Por tanto,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \operatorname{Sh}^{-1} \frac{x}{a} \left(\text{o } \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right)$$

(Ap. 10.11, núm. 20.)

7. $\displaystyle \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$

La forma de esta función sugiere la sustitución $\operatorname{tg}^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$. Según esto, sea

$$x = a \operatorname{tg} \theta$$

Entonces:

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a} \quad ; \quad dx = a \sec^2 \theta d\theta$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \int \frac{a \sec^2 \theta d\theta}{a^2(\operatorname{tg}^2 \theta + 1)} = \int \frac{a \sec^2 \theta}{a^2 \sec^2 \theta} d\theta = \frac{1}{a} \int d\theta = \frac{1}{a} \theta$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a}$$ (Ap. 10.11, núm. 18.)

Resumen de las fórmulas

	Integral	Sustitución	Resultado
1.	$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx$, $x < a$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$\frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x\sqrt{a^2 - x^2}$
2.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$x = a \operatorname{sen} \theta$	$\operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$
3.	$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx$, $x > a$	$x = a \operatorname{Ch} z$	$\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a}$ o $\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$
4.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$	$x = a \operatorname{Ch} z$	$\operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a}$ o $\ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}$
5.	$\int \sqrt{x^2 + a^2}dx$	$x = a \operatorname{Sh} z$	$\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Sh}^{-1} \frac{x}{a}$ o $\frac{1}{2} x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$
6.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$	$x = a \operatorname{Sh} z$	$\operatorname{Sh}^{-1} \frac{x}{a}$ o $\ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}$
7.	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2}$	$x = a \operatorname{tg} \theta$	$\frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a}$

Nota. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ y $\int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ se resuelven por un método que se presentará posteriormente (Ap. 12.2).

Una sustitución trigonométrica útil viene dada por las siguientes fórmulas, en las que $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se expresan en función de $\operatorname{tg}(x/2)$. Las fórmulas son:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x} \quad ; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}$$

Al usar estas fórmulas conviene proceder de la manera siguiente. Sea

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad ; \quad \cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Puesto que

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

$$dt = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x dx$$

$$dx = \frac{2dt}{\sec^2\frac{1}{2}x} = \frac{2dt}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}x}$$

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

Esta sustitución se puede utilizar para hallar la integral siguiente:

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x} = \int \frac{2dt}{1 + t^2} \div \frac{2t}{1 + t^2} = \int \frac{dt}{t} = \ln t$$

$$\int \operatorname{cosec} x dx = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

$\int \sec x dx$ se puede hallar similarmente o se puede derivar a partir de lo anterior así.

Por trigonometría sabemos que

$$\sec x = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Luego

$$\int \sec x dx = \int \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\int \sec x dx = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

También se puede demostrar que esto es igual a

$$\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$$

Las integrales $\int \frac{dx}{a + b\cos x}$ y $\int \frac{dx}{a + b \operatorname{sen} x}$ pueden resolverse con las sustituciones anteriores.

El ejemplo siguiente ilustrará el método.

Hallar la integral $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}$.

Sea

$$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$$

donde

$$t = \operatorname{tg}\frac{1}{2}x$$

Entonces:

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Simplificando, la integral se convierte en

$$\int \frac{2dt}{5(1 + t^2) + 4(1 - t^2)} = 2\int \frac{dt}{9 + t^2}$$

Esta integral tiene la forma de la integral 18 del apartado 10.11, luego

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = 2\left(\frac{1}{3}\text{tg}^{-1}\frac{t}{3}\right) = \frac{2}{3}\text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\text{tg}\frac{1}{2}x\right)$$

La integral resultante puede adoptar una de las formas 18, 22 o 23 de las integrales estándar del apartado 10.11, según los valores relativos de a y b, o puede requerir para su resolución los métodos dados en el capítulo 12.

Ejemplos resueltos

Los siguientes ejemplos resueltos son variaciones numéricas de lo anterior.

1. Integrar $\int \sqrt{16 - 9x^2}dx$.

Sea

$$3x = 4\,\text{sen}\,\theta$$

Entonces

$$x = \frac{4}{3}\text{sen}\,\theta \quad \text{y} \quad \theta = \text{sen}^{-1}\frac{3}{4}x$$

$$dx = \frac{4}{3}\cos\theta d\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{9x^2}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - 9x^2}$$

Sustituyendo:

$$\int\sqrt{16-9x^2}\,dx = \int\sqrt{16-16\,\text{sen}^2\theta}\cdot\frac{4}{3}\cos\theta d\theta =$$

$$= 4\int\cos\theta\cdot\frac{4}{3}\cos\theta d\theta = \frac{16}{3}\int\cos^2\theta d\theta =$$

$$= \frac{16}{3}\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{8}{3}\left(\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{4}x + \text{sen}\,\theta\cos\theta\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\left(\text{sen}^{-1}\frac{3}{4}x + \frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{4}\sqrt{16-9x^2}\right) =$$

$$= \frac{8}{3}\,\text{sen}^{-1}\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}x\sqrt{16-9x^2}$$

2. Integrar $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}}$.

Si hacemos

$$x = \frac{1}{3}\,\text{Sh}\,z$$

entonces:

$$z = \text{Sh}^{-1}3x \quad ; \quad dx = \frac{1}{3}\text{Ch}\,zdz$$

y

$$\text{Ch}\,z = \sqrt{1+\text{Sh}^2 z} = \sqrt{1+9x^2}$$

Entonces:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{9x^2+1}} = \int\frac{\frac{1}{3}\text{Ch}\,zdz}{\sqrt{\text{Sh}^2 z+1}} = \frac{1}{3}\int\frac{\text{Ch}\,zdz}{\text{Ch}\,z} = \frac{1}{3}\int dz = \frac{1}{3}z = \frac{1}{3}\text{Sh}^{-1}3x$$

3. Integrar $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}$.

Si hacemos

$$x = \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sen}\theta$$

entonces

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{3}{2}}x$$

$$dx = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta d\theta$$

$$\cos\theta = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{1-\frac{3}{2}x^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-3x^2}$$

Luego

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}} = \int\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta d\theta}{\sqrt{2-2\operatorname{sen}^2\theta}} = \int\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\cos\theta d\theta}{\sqrt{2}\cos\theta} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int d\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}x$$

4. Integrar $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

Sea

$$x = \operatorname{tg}\theta$$

Entonces:

$$dx = \sec^2\theta d\theta \quad \text{y} \quad \sec\theta = \sqrt{1+x^2}$$

Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\operatorname{tg}^2\theta\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \int \frac{\sec^2\theta d\theta}{\operatorname{tg}^2\theta\sec\theta} =$$

$$= \int \frac{1}{\cos\theta}\cdot\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}d\theta = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} =$$

(Directamente, o poniendo $\operatorname{sen}\theta = z$.)

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = -\frac{\sec\theta}{\operatorname{tg}\theta} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

11.2.2. Sustituciones algebraicas

La transformación de una función en otra fácilmente integrable puede llevarse a cabo mediante convenientes sustituciones algebraicas en las que se cambia la variable independiente. Las formas que adoptan estas sustituciones dependerá de la clase de función a integrar y, en general, la experiencia y la pericia irán indicando el camino a seguir para resolverlas. Lo que se pretende, en términos generales, es simplificar la función de manera que se convierta en otra más fácil de integrar.

Ejemplos frecuentes de este método son los casos de funciones irracionales en los que la expresión bajo el radical es de primer grado, del tipo $ax + b$. Estas funciones se pueden integrar por sustitución.

Sea

$$ax + b = u^2$$

o

$$u = \sqrt{ax+b}$$

Los siguientes ejemplos son típicos del uso de la sustitución algebraica.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\int x\sqrt{2x+1}\,dx$.

Sea

$$2x + 1 = u^2$$

o

$$u = \sqrt{2x + 1}$$

Entonces:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - 1)$$

y

$$dx = udu$$

Sustituyendo:

$$\int x\sqrt{2x + 1}\,dx = \int \frac{1}{2}(u^2 - 1)\cdot u \cdot udu = \frac{1}{2}\int u^2(u^2 - 1)du =$$

$$= \frac{1}{2}\int (u^4 - u^2)du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\right) = \frac{1}{30}(3u^5 - 5u^3) =$$

$$= \frac{1}{30}[3(2x + 1)^{5/2} - 5(2x + 1)^{3/2}]$$

2. Integrar $\int \frac{xdx}{\sqrt{x + 3}}$.

Racionalizamos el denominador mediante la sustitución

$$z = \sqrt{x + 3} \quad \text{o} \quad x + 3 = z^2$$

Entonces:

$$z = z^2 - 3$$

y

$$dx = 2zdz$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x+3}} = \int \frac{(z^2-3)2zdz}{\sqrt{z^2}} = 2\int \frac{(z^2-3)zdz}{z} =$$

$$= 2\int (z^2-3)dz = 2\left(\frac{z^3}{3} - 3z\right) =$$

$$= \frac{2z}{3}(z^2-9) = \frac{2}{3}(x-6)\sqrt{x+3}$$

3. Integrar $\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx.$

Sea

$$u^2 = 1 - x^2 \quad \text{y} \quad x^2 = 1 - u^2$$

Entonces:

$$x = \sqrt{1-u^2}$$

y

$$dx = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du$$

Sustituyendo:

$$\int x^3\sqrt{(1-x^2)}dx = \int (1-u^2)\sqrt{1-u^2}\cdot u \cdot \frac{-u}{\sqrt{1-u^2}}du =$$

$$= -\int u^2(1-u^2)du = -\left(\frac{5u^3-3u^5}{15}\right) =$$

$$= -\frac{1}{15}u^3(5-3u^2) =$$

$$= -\frac{1}{15}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,[5-3(1-x^2)] =$$

$$= -\frac{1}{15}[(1-x^2)^{3/2}(2+3x^2)]$$

4. Calcular $\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$.

En este caso no es necesaria ninguna racionalización, sino que hay que buscar una sustitución que simplifique la forma exponencial de la función. Así, sea

$$u = e^x$$

Entonces:

$$e^{-x} = \frac{1}{u} \quad ; \quad du = e^x dx$$

o

$$dx = \frac{du}{e^x} \quad \text{o} \quad \frac{du}{u}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{du}{u} \div \left(u + \frac{1}{u}\right) = \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

De esta forma se llega a una integral estándar, a saber, la número 18 (Ap. 10.11):

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \text{tg}^{-1}\, u = \text{tg}^{-1}\, e^x$$

5. Integrar $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt[3]{\text{sen}\, x}} dx$.

Este ejemplo ilustra la ventaja, en ciertos casos, de transformar formas trigonométricas en formas algebraicas, lo contrario del método utilizado en el apartado 11.2.1. Entonces será más fácil operar con los exponentes. Sea

$$\text{sen}\, x = u$$

Entonces:

$$\sqrt{1-u^2} = \cos x$$

Luego

$$\cos x dx = du$$

Por tanto:

$$\int \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\operatorname{sen} x}} = \int \frac{\cos^2 x \cdot \cos x dx}{(\operatorname{sen} x)^{1/3}} = \int \frac{(1-u^2)\cdot du}{u^{1/3}} =$$

$$= \int (u^{-1/3} - u^{5/3}) du = \frac{3}{2}u^{2/3} - \frac{3}{8}u^{8/3} =$$

$$= \frac{3}{8}u^{2/3}(4-u^2) = \frac{3}{8}\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}(4 - \operatorname{sen}^2 x)$$

6. Calcular la integral de $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx$.

La forma de la función invita a la misma sustitución empleada en el ejemplo precedente. Sea

$$\cos x = u$$

Entonces:

$$\operatorname{sen} x = \sqrt{1-\cos^2 x}$$

Asimismo,

$$-\operatorname{sen} x dx = du$$

Desdoblando el factor $\operatorname{sen}^3 x$ en $\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x$ y sustituyendo:

$$\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x dx = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^4 x \operatorname{sen} x dx =$$

$$= \int (1 - u^2) \cdot u^4 \cdot (-du) =$$

$$= -\int (u^4 - u^6) du = -\left(\frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7}\right) =$$

$$= \frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$$

7. Integrar $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2}$.

Sea

$$x = u^2$$

Entonces:

$$dx = 2udu$$

Luego

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + 2} = \int \frac{2udu}{u + 2} = 2\int \frac{(u + 2) - 2}{u + 2} du =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{2}{u + 2}\right) du = 2[u - 2\ln(u + 2)] =$$

$$= 2[\sqrt{x} - 2\ln(\sqrt{x} + 2)]$$

11.3. Integración por partes

Este método de integración se basa en el de la regla para la diferenciación de un producto de dos funciones (Ap. 5.2), a saber:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

donde u y v son funciones de x.

Integrando toda la expresión respecto a x, tenemos:

$$uv = \int u\frac{dv}{dx}dx + \int v\frac{du}{dx}dx$$

Puesto que u y v son funciones de x, lo anterior se puede escribir de forma más conveniente así:

$$uv = \int udv + \int vdu$$

Por tanto, si se conoce una de las dos integrales de la parte derecha de la ecuación, se puede calcular la otra. Así, podemos elegir entre resolver una u otra de las integrales, la que sea más fácil o factible. Si, por ejemplo, se ve que $\int vdu$ se puede calcular fácilmente, entonces la otra integral, $\int udv$, puede calcularse. Así:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1)$$

El método que se propone se entenderá mejor estudiando un ejemplo. Supongamos que se quiere hallar la integral

$$\int x \cos x dx$$

Sea

$$u = x \quad \text{y} \quad dv = \cos x dx$$

Entonces:

$$du = dx$$

puesto que

$$dv = \cos x dx$$

$$v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo en las fórmulas $\int udv = uv - \int vdu$, obtenemos:

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx$$

Así, en vez de calcular la integral original, tenemos ahora que calcular la integral más simple de $\int \operatorname{sen} x dx$, que sabemos es $-\cos x$, luego

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Si hubiéramos escogido u y v de manera que:

$$u = \cos x$$

entonces:

$$du = -\operatorname{sen} x dx$$

$$dv = x dx$$

y

$$v = \int x dx = \frac{1}{2} x^2$$

Sustituyendo en las fórmulas, tenemos:

$$\int x \cos x dx = \frac{1}{2} x^2 \cos x - \int \frac{1}{2} x^2 (-\operatorname{sen} x)$$

Por tanto, la integral que hay que calcular es más difícil que la original.

La fórmula (1) anterior se podría, por tanto, escribir en la forma:

$$\int vdu = uv - \int udv \qquad (2)$$

La elección es arbitraria, pero se encontrará probablemente que lo mejor será utilizar siempre una de las dos formas que hemos visto. Si se elige la (1), entonces u representará siempre la función que hay que diferenciar y dv la función que hay que integrar para completar la fórmula. Al determinarse cuál de las dos funciones debe ser, por tanto, representada por u o v, hay que tantear primero cuál dará lugar a una integral final más fácil.

Los siguientes ejemplos resueltos quizá permitan aclarar estos puntos.

Ejemplos resueltos

1. Calcular la integral $\int \ln x dx$.

Evidentemente, puesto que $\ln x$ da lugar a una expresión más simple al ser diferenciada, podemos escribir:

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

Por tanto, sustituyendo en

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln xdx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$$

o

$$\int \ln xdx = x(\ln x - 1)$$

(Reténgase esta importante integral.)

2. Calcular $\int xe^{ax}dx$.

Sabemos que e^{ax} nos da el mismo resultado, excepto en las constantes, al ser diferenciada o integrada. Pero x tiene una derivada simple. De ahí que sea

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{ax}dx \quad \Rightarrow \quad v = \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax}$$

Sustituyendo en

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^{ax}dx = x\frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}\frac{1}{a}e^{ax} = \frac{1}{a}e^{ax}\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

3. Integrar $\int x^2 \operatorname{sen} xdx$.

Por las razones dadas en el apartado 11.4, escogemos

$$u = x^2 \quad , \quad du = 2xdx$$

y

$$dv = \operatorname{sen} xdx \quad \text{y} \quad v = \int \operatorname{sen} xdx = -\cos x$$

Sustituyendo en la expresión (1), tenemos:

$$\int x^2 \operatorname{sen} xdx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos xdx$$

En este ejemplo no se llega a una integral que se puede encontrar directamente, sino a una que requiere ser «integrada por partes».

Como se ha demostrado anteriormente:

$$\int x \cos x dx = x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Sustituyendo este resultado en el resultado obtenido anteriormente, tenemos

$$\int x^2 \operatorname{sen} x dx = -x^2 \cos x + 2(x \operatorname{sen} x + \cos x) =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x$$

Este proceso podrá repetirse diversas veces. Por ejemplo, para hallar $\int x^3 \operatorname{sen} x dx$ habrá que aplicar tres veces el proceso de integración.

4. Integrar $\int \operatorname{sen}^{-1} x dx$.

Como en el ejemplo 2, debemos representar dx por dv, y u por $\operatorname{sen}^{-1} x$. Sea

$$u = \operatorname{sen}^{-1} x \quad , \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$dv = dx \quad , \quad v = \int dx = x$$

Sustituyendo en

$$\int u dv = uv - \int v du$$

obtenemos:

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x dx = x \operatorname{sen}^{-1} x - \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Teniendo en cuenta que el numerador es la derivada de $\sqrt{1 - x^2}$ con el signo cambiado:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}} = -\sqrt{1 - x^2}$$

De ahí:

$$\int \operatorname{sen}^{-1} x = x \operatorname{sen}^{-1} x + \sqrt{1 - x^2}$$

5. Calcular $\int e^x \cos xdx$.

Sí hacemos

$$u = e^x \quad , \quad du = e^x dx$$

y hacemos

$$dv = \cos xdx \quad , \quad v = \int \cos xdx = \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo en

$$\int udv = uv - \int vdu$$

obtenemos

$$\int e^x \cos xdx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} xdx \qquad (1)$$

Así, nos queda una integral del mismo tipo que la original. Ahora hagamos

$$u = \cos x \quad , \quad du = -\operatorname{sen} xdx$$

y

$$dv = e^x dx \quad , \quad v = e^x$$

Sustituyendo la fórmula anterior:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x - \int e^x(-\operatorname{sen} x dx)$$

Por tanto,

$$\int e^x \cos x dx = e^x \cos x + \int e^x \operatorname{sen} x dx \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2):

$$2\int e^x \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

De la misma manera podemos encontrar la forma general de estas integrales:

$$\int e^{ex} \cos bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx)$$

y

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \operatorname{sen} bx - b \cos bx)$$

O de forma más general:

$$\int e^{ax} \cos(bx + c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a \cos(bx + c) + b \operatorname{sen}(bx + c)]$$

$$\int e^{ax} \operatorname{sen}(bx + c) dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}[a \operatorname{sen}(bx + c) - b \cos(bx + c)]$$

EJERCICIOS

1. $\int \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} dx.$

2. $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx.$

3. $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx.$

4. $\int \cos^4 x dx.$

5. $\int \operatorname{sen}^4 x dx.$

6. $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx.$

7. $\int \operatorname{sen}^2 2x dx.$

8. $\int \cos^2 3x dx.$

9. $\int \cos^2 (ax + b) dx.$

10. $\int \operatorname{sen}^3 x dx.$

11. $\int \cos^3 x dx.$

12. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x dx.$

13. $\int \cos 3x \cos x dx.$

14. $\int \operatorname{sen} 4x \cos 2x dx.$

15. $\int \operatorname{sen} 4x \cos \frac{3x}{2} dx.$

16. $\int \operatorname{sen} ax \cos bx dx.$

17. $\int \operatorname{sen} \theta \cos \theta \, d\theta.$

18. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx.$

19. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x}.$

20. $\int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} dx.$

21. $\int \operatorname{tg}^3 x dx.$

22. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx.$

23. $\int \sqrt{1 + \cos x} \, dx.$

24. $\int \sec^4 x dx.$

Utilizar los métodos dados anteriormente para hallar las integrales siguientes empleando las sustituciones convenientes.

Nota. Para otros ejemplos análogos a 25-34, pero en los que figuran cantidades irracionales en el denominador de las fracciones, se recomienda resolver algunos de los ejemplos de los ejercicios 91-104 del capítulo 10 por el método de sustitución.

25. $\int \sqrt{9 - x^2}\,dx.$
(Sustituir $x = 3 \operatorname{sen} \theta$.)

26. $\int \sqrt{25 - x^2}\,dx.$

27. $\int \sqrt{1 - 4x^2}\,dx.$

28. $\int \sqrt{9 - 4x^2}\,dx.$
(Sustituir $x = 3/2 \operatorname{sen} \theta$.)

29. $\int \sqrt{x^2 - 4}\,dx.$

30. $\int \sqrt{x^2 - 25}\,dx.$

31. $\int \sqrt{x^2 + 49}\,dx.$

32. $\int \sqrt{x^2 + 5}\,dx.$

33. $\int \sqrt{25x^2 + 16}\,dx.$

34. $\int \sqrt{x^2 - 3}\,dx.$

35. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 - x^2}}.$

36. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + 1}}.$

37. $\int \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x^2}\,dx.$

38. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2 + x^2}}.$

39. $\int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^{3/2}}.$

40. $\int \frac{dx}{(1 - x)\sqrt{1 - x^2}}.$
(Sustituir $x = \cos \theta$.)

41. $\int \operatorname{cosec} \frac{1}{2} x\,dx.$

42. $\int \sec \frac{1}{2} x\,dx.$

43. $\int \operatorname{cosec} 3x dx.$

44. $\int \sec x \operatorname{cosec} x dx.$

45. $\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$

46. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{sen} x}.$

47. $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{sen} x}.$

48. $\int (\sec x + \operatorname{tg} x) dx.$

49. $\int \frac{dx}{5 + 3\cos x}.$

50. $\int \frac{dx}{5 - 3\cos x}.$

51. $\int \frac{dx}{4 + 5\cos x}.$

52. $\int \frac{dx}{4 - 5\operatorname{sen} x}.$

Nota. Algunos de los ejercicios que siguen se pueden resolver directamente, recordando la regla para la diferenciación de una función de función. Se recomienda, sin embargo, siquiera sea para ir adquiriendo práctica, que se resuelvan por el método de sustitución. Integrar las funciones siguientes:

53. $\int x^2 \cos x^3 dx.$
(Sustituir $x^3 = u$.)

54. $\int \frac{x^2 dx}{1 - 2x^3}.$
(Sustituir $2x^3 = u$.)

55. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 + x^2}}.$

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - 5x}}.$

57. $\int \frac{1}{\sqrt{x}} \operatorname{sen} \sqrt{x} dx.$

58. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^3}}.$

59. $\int \frac{\operatorname{sen} x dx}{1 + 2\cos x}.$

60. $\int \frac{\log x dx}{x}.$

61. $\int x\sqrt{5 + x^2} dx.$

62. $\int \frac{2x dx}{1 + x^4}.$

63. $\int x(x-2)^4 dx.$

64. $\int \frac{x^2 dx}{(x+1)^3}.$

65. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x-1}}.$

66. $\int x\sqrt{x-1}\, dx.$

67. $\int \frac{x dx}{\sqrt{5-x^2}}.$

68. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-1}}.$

69. $\int x\sqrt[3]{x-2}\, dx.$

70. $\int \frac{x^3 dx}{x-1}$ (Sustituir $x-1=u$.)

71. $\int x^3\sqrt{x^2-2}\, dx.$

72. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3}.$

73. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$

74. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x}+1}.$

75. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^2 x dx.$

76. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^5 x dx.$

77. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+1)^{2/3}}.$

78. $\int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x}.$

79. $\int x^5(1+2x^3)^{1/2} dx.$

80. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$

81. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx.$
(Sustituir $x = 1/u$.)

82. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx.$
(Sustituir $1 + \ln x = z$.)

Calcular las integrales siguientes:

83. $\int x \operatorname{sen} x dx.$

84. $\int x \operatorname{sen} 3x dx.$

85. $\int x^2 \cos x\,dx.$

86. $\int x^3 \cos x\,dx.$

87. $\int x \ln x\,dx.$

88. $\int x^2 \ln x\,dx.$

89. $\int x^3 \ln x\,dx.$

90. $\int \sqrt{x} \ln x\,dx.$

91. $\int xe^x dx.$

92. $\int x^2 e^x dx.$

93. $\int xe^{-ax} dx.$

94. $\int e^x \cos 2x\,dx.$

95. $\int \cos^{-1} x\,dx.$

96. $\int \mathrm{tg}^{-1} x\,dx.$

97. $\int x\,\mathrm{tg}^{-1} x\,dx.$

98. $\int e^x \,\mathrm{sen}\, x\,dx.$

99. $\int x\,\mathrm{sen}^2 x\,dx.$

100. $\int x\,\mathrm{sen}\, x \cos x\,dx.$

101. $\int x \sec^2 x\,dx.$

102. $\int x\,\mathrm{Sh}\, x\,dx.$

103. $\int x^2\,\mathrm{sen}^{-1} x\,dx.$

104. $\int x^3 (\ln x)^2 dx.$

12 Integración de fracciones algebraicas

12.1. Fracciones racionales

Con frecuencia se dan fracciones de ciertos tipos en las funciones que se han integrado en los capítulos anteriores. Unas de las más frecuentes son aquellas en las que el numerador se puede expresar como la derivada del denominador. Como quedó dicho en el apartado 10.8:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$$

Una forma especial de esta expresión, que va a aparecer constantemente en las páginas que siguen, es aquella en que el denominador es de primer grado y tiene la forma general:

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \int \frac{a dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln (ax + b) + C$$

Variantes de esta forma son, por ejemplo, las fracciones en las que el numerador es del mismo grado o de grado superior que el denominador. Ya hemos visto algunos casos sencillos de esta clase. Estas fracciones frecuentemente se pueden transformar de modo que se pueda aplicar la regla mencionada anteriormente. Se presentan a continuación algunos ejemplos resueltos ilustrativos.

Ejemplos resueltos

1. Calcular $\int \frac{x^2}{x+1} dx$.

El proceso utilizado para transformar esta fracción es semejante al que se emplea en aritmética. Así, la fracción

$$\frac{11}{8} = \frac{8+3}{8} = 1 + \frac{3}{8}$$

De igual modo, en el ejemplo anterior:

$$\int \frac{x^2 dx}{x+1} = \int \frac{(x^2-1)+1}{x+1} dx = \int \frac{x^2-1}{x+1} dx + \int \frac{1}{x+1} dx =$$

$$= \int \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} dx + \int \frac{1}{1+x} dx =$$

$$= \int (x-1) dx + \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \ln(x+1)$$

2. Calcular $\int \frac{3x+1}{2x-3} dx$.

Entonces:

$$\int \frac{3x+1}{2x-3} dx = \int \frac{\left[\frac{3}{2}(2x-3) + \frac{9}{2}\right] + 1}{2x-3} dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-3) + \frac{11}{2}}{2x-3} dx =$$

$$= \int \frac{3}{2} dx + \int \frac{\frac{11}{2}}{2x-3} dx = \frac{3}{2}x + \frac{11}{2} \times \frac{1}{2} \ln(2x-3) =$$

$$= \frac{3}{2}x + \frac{11}{4} \ln(2x-3) \qquad \text{(Ap. 12.1.)}$$

12.2. Método de las fracciones parciales

En las anteriores fracciones los denominadores son de primer grado. Vamos a proceder ahora a considerar fracciones con denominadores de segundo grado o superior.

Sumando las fracciones de este tipo, como por ejemplo

$$\frac{2}{x+3} - \frac{1}{x+5}$$

obtenemos:

$$\frac{2(x+5) - (x+3)}{(x+3)(x+5)} = \frac{x+7}{x^2+8x+15}$$

Invirtiendo este proceso, $\frac{x+7}{x^2+8x+15}$ se puede descomponer en las dos fracciones $\frac{2}{x+3}$ y $\frac{-1}{x+5}$, que se denominan sus *fracciones parciales* y que se pueden integrar directamente. Mediante este procedimiento se obtiene la integral de $\frac{x+7}{x^2+8x+15}$. Al desarrollar este método consideraremos, en un primer momento, aquellos casos en los que el denominador de la fracción a integrar se puede descomponer en diferentes factores de primer grado.

Si en la fracción a integrar el numerador es del mismo o superior grado que el denominador, la fracción se puede simplificar previamente por el procedimiento dado en el apartado 12.1.

Los ejemplos siguientes indican cómo se obtienen las fracciones parciales.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\int \frac{x+35}{x^2-25}\,dx$.

Descomponiendo el denominador en factores:

$$\frac{x+35}{x^2-25} = \frac{x+35}{(x+5)(x-5)}$$

A partir de lo que llevamos dicho, esta expresión se puede descomponer en dos fracciones parciales con denominadores $(x + 5)$ y $(x - 5)$. Puesto que el numerador de la fracción dada es de grado inferior al denominador, es evidente que los numeradores de las fracciones parciales serán números, esto es, no contendrán x.

Sean los numeradores A y B, de modo que

$$\frac{x + 35}{(x + 5)(x - 5)} = \frac{A}{x - 5} + \frac{B}{x + 5} \qquad (1)$$

Eliminando las fracciones:

$$x + 35 = A(x + 5) + B(x - 5) \qquad (2)$$

Esto es una igualdad y, por tanto, cierto para cualesquiera valores de x.

Sea $x = 5$, con lo que el coeficiente B se hace 0. Entonces:

$$5 + 35 = 10A + 0$$

$$10A = 40$$

$$A = 4$$

Sustituyendo este valor de A en (2) nos daría una ecuación que se puede resolver para B. Pero en éste, y en la mayoría de los casos, resulta más simple sustituir un valor de x en (2) de modo que se anule el coeficiente A.

Sea $x = -5$. Sustituyendo en (2):

$$-5 + 35 = 0 + B(-5 - 5)$$

$$10B = -30$$

y

$$B = -3$$

Sustituyendo los valores de A y B en (1):

$$\frac{x + 35}{x^2 - 25} = \frac{4}{x - 5} - \frac{3}{x + 5}$$

De donde

$$\int \frac{x + 35}{x^2 - 25}\,dx = \int \frac{4dx}{x - 5} - \frac{3dx}{x + 5} = 4\ln(x - 5) - 3\ln(x + 5)$$

2. Integrar $\dfrac{dx}{x^2 - a^2}$.

Se trata ahora de una forma generalizada del ejemplo 1, que se encuentra en el número 23 de las integrales estándar (Ap. 11.1).

Descomponiendo en factores:

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{(x + a)(x - a)}$$

Sea

$$\frac{1}{(x + a)(x - a)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

Luego

$$1 = A(x + a) + B(x - a)$$

— Sea $x = a$. Entonces:

$$1 = A(2a) + B(0)$$

Por tanto,

$$A = \frac{1}{2a}$$

— Sea $x = -a$. Entonces:

$$1 = A(0) + B(-2a)$$

Luego

$$B = -\frac{1}{2a}$$

Así,

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x - a} - \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{x + a}$$

y

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{dx}{x - a} - \frac{dx}{x + a} \right) =$$

$$= \frac{1}{2a} [\ln (x - a) - \ln (x + a)]$$

o

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} = -\frac{1}{a} \text{Ctgh}^{-1} \frac{x}{a}$$

Similarmente,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{a + x}{a - x} = \frac{1}{a} \text{Tgh}^{-1} \frac{x}{a}$$

3. Integrar $\int \frac{23 - 2x}{2x^2 + 9x - 5} dx$.

Descomponiendo en factores el denominador

$$\frac{23 - 2x}{2x^2 + 9x - 5} = \frac{23 - 2x}{(2x - 1)(x + 5)}$$

Sea

$$\frac{23 - 2x}{(2x - 1)(x + 5)} = \frac{A}{2x - 1} + \frac{B}{x + 5}$$

$$23 - 2x = A(x + 5) + B(2x - 1)$$

— Sea $x = -5$. Entonces:

$$23 + 10 = A(0) + B(-11)$$

Luego

$$B = -3$$

— Sea $x = 1/2$. Entonces:

$$23 - 1 = A\left(\frac{11}{2}\right) + B(0)$$

Luego

$$A = 4$$

De ahí:

$$\frac{23 - 2x}{2x^2 + 9x - 5} = \frac{4}{2x - 1} - \frac{3}{x + 5}$$

$$\int \frac{23 - 2x}{2x^2 + 9x - 5}\,dx = \int \frac{4dx}{2x - 1} - \int \frac{3dx}{x + 5} =$$

$$= 2\ln(2x - 1) - 3\ln(x + 5)$$

4. Integrar $\displaystyle\int \frac{x^2 + 10x + 6}{x^2 + 2x - 8}\,dx$.

Como el numerador tiene el mismo grado que el denominador, procedemos como se indicó en el apartado 12.1, ejemplo 1. Entonces:

$$\frac{x^2 + 10x + 6}{x^2 + 2x - 8} = \frac{(x^2 + 2x - 8) + (8x + 14)}{x^2 + 2x - 8} = 1 + \frac{8x + 14}{x^2 + 2x - 8}$$

La fracción así obtenida se descompone ahora en fracciones parciales. Descomponiendo el denominador, tenemos:

$$\frac{8x + 14}{x^2 + 2x - 8} = \frac{8x + 14}{(x - 2)(x + 4)}$$

Sea

$$\frac{8x + 14}{x^2 + 2x - 8} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 4}$$

Tendremos:

$$8x + 14 = A(x + 4) + B(x - 2)$$

— Sea $x = -4$. Entonces:

$$-18 = A(0) + B(-6)$$

Luego

$$B = 3$$

— Sea $x = 2$. Entonces:

$$30 = A(6) + B(0)$$

Luego

$$A = 5$$

$$\frac{8x + 14}{(x - 2)(x + 4)} = \frac{5}{x - 2} + \frac{3}{x + 4}$$

$$\int \frac{x^2 + 10x + 6}{x^2 + 2x - 8} dx = \int \left(1 + \frac{5}{x - 2} + \frac{3}{x + 4}\right) dx =$$

$$= x + 5 \ln(x - 2) + 3 \ln(x + 4)$$

1. Cuando el denominador es el cuadrado de un binomio, como por ejemplo $(x + a)^2$

En este caso, la fracción debe ser la suma de dos fracciones de las que los denominadores son $(x + a)$ y $(x + a)^2$ con constantes en los numeradores.

Ejemplo resuelto

Integrar $\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx$.

Sea

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

$$3x + 1 = A(x+1) + B$$

Sea

$$x = -1 \qquad (1)$$

Entonces:

$$-2 = A(0) + B$$

Luego

$$B = -2$$

Se puede calcular A utilizando la propiedad de una igualdad, a saber, *los coeficientes de los términos del mismo grado en los dos miembros de la igualdad son iguales*. Comparando los coeficientes de x en (1), obtenemos:

$$3 = A$$

$$\frac{3x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{3x+1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{3dx}{x+1} - \int \frac{2dx}{(x+1)^2} = 3\ln(x+1) + \frac{2}{x+1}$$

La segunda integral, esto es, $\int \frac{2dx}{(x+1)^2}$, se halla directamente, recordando que $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$.

2. Denominador con grado mayor que 2 y que se puede descomponer en factores

a) *El denominador se puede descomponer en distintos factores de primer grado*

El método es el mismo que cuando hay sólo dos factores, pero ahora el número de fracciones parciales corresponderá al número de factores.

EJEMPLO. Integrar $\dfrac{3 - 4x - x^2}{x(x^2 - 4x + 3)}$.

Descomponiendo en factores el denominador, obtenemos:

$$\frac{3 - 4x - x^2}{x(x - 1)(x - 3)}$$

Sea

$$\frac{-x^2 - 4x + 3}{x(x - 1)(x - 3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x - 3}$$

Entonces:

$$-x^2 - 4x + 3 = A(x - 1)(x - 3) + Bx(x - 3) + Cx(x - 1)$$

— Sea $x = 0$; entonces:

$$3 = 3A + B(0) + C(0)$$

Luego

$$A = 1$$

— Sea $x = 1$; entonces:

$$-2 = A(0) - 2B + C(0)$$

Luego

$$B = 1$$

— Sea $x = 3$; entonces:

$$-18 = A(0) + B(0) + 6C$$

Luego

$$C = -3$$

Por tanto:

$$\int \frac{-x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-3)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-3}\right) dx =$$

$$= \ln x + \ln(x-1) - 3\ln(x-3)$$

b) *El denominador se puede descomponer en factores de primer grado, de los que uno o varios de ellos se puede repetir*

Ejemplo resuelto

Integrar $\int \frac{-dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

El procedimiento es el mismo que el del caso 1 anterior. Sea

$$\frac{-1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Entonces:

$$-1 = A(x-1)(x-2) + B(x-2) + C(x-1)^2$$

— Sea $x = 1$; entonces:

$$-1 = A(0) - B + C(0)$$

Luego

$$B = 1$$

— Sea $x = 2$; entonces:

$$-1 = A(0) + B(0) + C$$

Luego

$$C = -1$$

— Sea $x = 0$; entonces:

$$-1 = 2A - 2 - 1$$

Luego

$$A = 1$$

(al sustituir los valores ya encontrados de B y C). Por tanto,

$$\int \frac{-dx}{(x-1)^2(x-2)} = \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-2} \right) dx =$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} - \ln(x-2)$$

3. El denominador contiene un factor de segundo grado que no se puede descomponer en factores

Se puede emplear el método segundo en casos que hemos ya considerado.

Ejemplo resuelto

Integrar $\displaystyle\int \frac{(x-1)dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

El factor $(x^2 + 1)$ no se puede descomponer en factores reales. Sin embargo, se pueden obtener dos fracciones parciales con los denomi-

nadores $(x + 1)$ y $(x^2 + 1)$. Pero el numerador de la fracción que contiene el denominador de segundo grado, a saber, $(x^2 + 1)$, puede ser de *primer* grado respecto a x. De forma general, esto se puede expresar mediante $(Bx + C)$. Sea

$$\frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Entonces:

$$x - 1 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1) \qquad (1)$$

Sea $x = -1$; entonces:

$$-2 = A(2) + 0$$

Luego

$$A = -1$$

Sustituyendo este valor de A en (1), obtenemos:

$$x - 1 = -(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$$

o

$$x^2 + x = (Bx + C)(x + 1)$$

Igualando los coeficientes de x^2:

$$1 = B \Rightarrow B = 1 \qquad \text{(Ap. 12.2, punto 1.)}$$

Igualando los coeficientes de x:

$$1 = B + C \Rightarrow C = 0$$

De ahí:

$$\frac{x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)}dx = -\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{xdx}{x^2+1} =$$

$$= -\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

Nota. La integral $\int \frac{xdx}{x^2+1}$ se puede calcular aplicando la regla dada en el apartado 10.9, pero para casos más complicados será necesario utilizar los métodos que se dan en el apartado que sigue.

4. Denominador de la forma $ax^3 + bx + c$ y que no se puede descomponer en factores

Se sabe por álgebra que la expresión $ax^2 + bx + c$ se puede expresar siempre como la suma o diferencia de dos cuadrados, como se ilustra en los siguientes ejemplos:

$$x^2 + 4x + 2 = [x^2 + 4x + (2)^2] - 2^2 + 2 =$$
$$= (x+2)^2 - 2 \;[\text{o } (x+2)^2 - (\sqrt{2})^2]$$

$$2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x^2 - \frac{3}{2}x\right) + 1 =$$
$$= 2\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right] - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 =$$
$$= 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} = \left[\sqrt{2}\left(x - \frac{3}{4}\right)\right]^2 - \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2$$

$$x^2 + 6x + 14 = [x^2 + 6x + (3)^2] - (3)^2 + 14 =$$
$$= (x+3)^2 + 5 = (x+3)^2 + (\sqrt{5})^2$$

$$12 + 5x - x^2 = 12 - (x^2 - 5x) = 12 - \left[x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2\right] + \frac{25}{4} =$$
$$= \frac{73}{4} - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{73}}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{5}{2}\right)^2$$

Ninguna de estas expresiones tiene factores racionales. Todas ellas se pueden incluir en los tres tipos siguientes:

1. $x^2 - a^2$.
2. $x^2 + a^2$.
3. $a^2 - x^2$.

Hemos visto que las fracciones de las que estas expresiones son el denominador son de forma estándar (Ap. 11.1, núms. 18, 22 y 23). Por tanto, el denominador de una fracción de la forma $ax^2 + bx + c$ se puede transformar en uno de estos tres tipos. Repetimos por conveniencia estas tres integrales, pues las vamos a estar usando constantemente en los ejemplos que siguen:

a) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\text{Ctgh}^{-1}\frac{x}{a}\left(\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{x-a}{x+a}\right).$$

b) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\text{tg}^{-1}\frac{x}{a}.$$

c) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\text{Tgh}^{-1}\frac{x}{a}\left(\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}\right).$$

Si sustituimos x por $(x + b)$ en cada una de las expresiones anteriores, como las derivadas de $x + b$ y x son las mismas, tenemos:

a) $$\int \frac{dx}{(x+b)^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\text{Ctgh}^{-1}\frac{x+b}{a}\quad\left[\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{(x+b)-a}{(x+b)+a}\right].$$

b) $$\int \frac{dx}{(x+b)^2 + a^2} = \frac{1}{a}\text{tg}^{-1}\frac{x+b}{a}.$$

c) $$\int \frac{dx}{a^2 - (x+b)^2} = \frac{1}{a}\text{Tgh}^{-1}\frac{x+b}{a}\quad\left[\text{o } \frac{1}{2a}\ln\frac{a+(x+b)}{a-(x+b)}\right].$$

Pueden darse dos casos en la integración de estas funciones fraccionarias. Estos casos se ilustran a continuación.

a) *Cuando el numerador es constante*

Tipo $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 2}$.

Expresamos primero el denominador en la forma $x^2 \pm a^2$:

$$x^2 + 6x + 2 = \left[x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2\right] - 9 + 2 = (x+3)^2 - 7$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 2} = \int \frac{dx}{(x+3)^2 - (\sqrt{7})^2}$$

la cual es de la forma *a*) anterior. Entonces:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 2} = -\frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{Ctgh}^{-1} \frac{x+3}{\sqrt{7}}$$

$$\left(\text{o } \frac{1}{2\sqrt{7}} \ln \frac{x + 3 - \sqrt{7}}{x + 3 + \sqrt{7}}\right)$$

2. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{2 + 3x - x^2}$.

Puesto que

$$2 + 3x - x^2 = 2 - \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} = \frac{17}{4} - \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

utilizando la fórmula *c*):

$$\int \frac{dx}{2+3x-x^2} = \int \frac{dx}{\frac{17}{4}-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{17}}\,\mathrm{Tgh}^{-1}\frac{x-3/2}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\text{o } \frac{1}{2\sqrt{17}}\ln\frac{\sqrt{17}+(2x-3)}{\sqrt{17}-(2x-3)}\right]$$

3. Integrar $\int \frac{dx}{2x^2+4x+3}$.

Reagrupando el denominador:

$$2x^2+4x+3 = 2\left[(x^2+2x+1)-1+\frac{3}{2}\right] =$$

$$= 2\left[(x+1)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\right]$$

Utilizando la fórmula *b*) y sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1/2}$$

Utilizando *b*) como integral:

$$\int \frac{dx}{2x^2+4x+3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2+1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{1/2}}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{1/2}}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{2}(x+1)$$

b) *Cuando el numerador contiene la variable de primer grado*

Tipo $\displaystyle\int \frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}\,dx.$

Para resolver esta integral se requiere una combinación de procedimientos previamente utilizados, como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\displaystyle\int \frac{6x + 7}{x^2 - x - 1}\,dx.$

Primero hay que reordenar el numerador, de modo que una parte de él sea la derivada del denominador.

Ahora

$$\frac{d}{dx}(x^2 - x - 1) = 2x - 1$$

Reordenando el numerador:

$$6x + 7 = 3(2x - 1) + 10$$

Reordenando el denominador:

$$x^2 - x - 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

Por tanto,

$$\int \frac{(6x + 7)dx}{x^2 - x - 1} = \int \frac{3(2x - 1) + 10}{x^2 - x - 1}\,dx =$$

$$= \int \frac{3(2x - 1)}{x^2 - x - 1}\,dx + \int \frac{10dx}{(x - 1/2)^2 - 5/4}$$

La primera integral se halla por la regla del apartado 10.8 y la segunda utilizando la forma estándar *a*) anterior:

$$\int \frac{(6x + 7)dx}{x^2 - x - 1} = 3\ln(x^2 - x + 1) + \frac{10}{\sqrt{5}} \ln \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Comprobación. Resulta un ejercicio muy útil comprobar algunos de estos resultados, diferenciando la integral obtenida. Ponemos como ejemplo, a continuación, la comprobación del anterior ejercicio.

Sea:

$$y = 3\ln(x^2 - x + 1) + \frac{10}{\sqrt{5}} \ln \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}}{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(2x - 1)}{x^2 - x + 1} + \frac{10}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}} - \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}} \right] =$$

$$= \frac{6x - 3}{x^2 - x + 1} + \frac{10}{\sqrt{5}} \left[\frac{\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) - \left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)} \right] =$$

$$= \frac{6x - 3}{x^2 - x + 1} + \frac{10}{\sqrt{5}} \left[\frac{\sqrt{5}}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} \right] =$$

$$= \frac{6x - 3}{x^2 - x + 1} + \frac{10}{x^2 - x + 1} = \frac{6x + 7}{x^2 - x + 1}$$

2. Integrar $\displaystyle\int \frac{5x+1}{2x^2+4x+3}dx.$

$$\frac{d}{dx}(2x^2+4x+3) = 4x+4.$$

Reordenando el numerador:

$$5x+1 = \frac{5}{4}(4x+4) - 4$$

Reordenando el denominador:

$$2x^2+4x+3 = 2\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right) = 2\left[(x+1)^2+\frac{1}{2}\right]$$

Luego

$$\int \frac{(5x+1)dx}{2x^2+4x+3} = \int \frac{5/4(4x+4)-4}{2x^2+4x+3}dx =$$

$$= \frac{5}{4}\int \frac{(4x+4)dx}{2x^2+4x+3} - 4\int \frac{dx}{2[(x+1)^2+1/2]} =$$

$$= \frac{5}{4}\ln(2x^2+4x+3) - \left(2 \div \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\text{tg}^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{1/2}} =$$

$$= \frac{5}{4}\ln(2x^2+4x+3) - 2\sqrt{2}\,\text{tg}^{-1}\sqrt{2}(x+1)$$

3. Integrar $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx.$

Primero hay que descomponer la fracción en fracciones parciales. Puesto que

$$x^3-1 = (x-1)(x^2+x+1)$$

Sea

$$\frac{2x+1}{x^3-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$2x + 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1)$$

Sea $x = 1$; entonces:

$$3 = A(3) + 0 \quad ; \quad A = 1$$

Comparando coeficientes:

(1) x^2: $0 = A + B = 1 + B \quad ; \quad B = -1$

(2) Constantes: $1 = -C + 1 \quad ; \quad C = 0$

$$\int \frac{(2x+1)dx}{x^3-1} = \int \frac{dx}{x-1} - \int \frac{xdx}{x^2+x+1}$$

(1) $\displaystyle\int \frac{dx}{x-1} = \ln(x-1)$

(2) $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^2+x+1} = \int \frac{1/2(2x+1) - 1/2}{x^2+x+1} dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + 3/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\text{tg}^{-1}\frac{x+1/2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

Como se ve al sustraer (2) de (1):

$$\int \frac{2x+1}{x^3-1} dx = \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

12.3. Fracciones con denominadores irracionales

Tipo $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Utilizando métodos similares a los empleados en apartados precedentes, las integrales de este tipo se pueden transformar en una de las siguientes formas estándar (Ap. 10.11):

a) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right).$$

b) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \mathrm{sen}^{-1}\frac{x}{a}.$$

c) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mathrm{Sh}^{-1}\frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right).$$

En este tipo el numerador es una constante y no contiene la variable. Consiguientemente, sólo es necesario transformar el denominador en una de las tres formas *a*), *b*) o *c*).

El método se ilustra mediante los ejemplos siguientes.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}}$.

Ahora

$$x^2 + 6x + 10 = x^2 + 6x + (3)^2 - 9 + 10 = (x + 3)^2 + 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x + 3)^2 + 1}}$$

Esta expresión es del tipo *c*) anterior, en el cual se sustituye x por $x + 3$, que tienen ambas la misma derivada.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 10}} = \mathrm{Sh}^{-1}(x + 3)$$

$$\{\text{o } \ln[(x + 3) + \sqrt{x^2 + 6x + 10}]\}$$

2. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}}$.

Ahora

$$(2x^2 + 3x - 2) = 2\left(x^2 + \frac{3}{2}x - 1\right) = 2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}}}$$

Utilizando el tipo *a*):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x - 2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Ch}^{-1} \frac{x + 3/4}{5/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Ch}^{-1} \frac{4x + 3}{5}$$

3. Integrar $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - 5x^2}}$.

$$4 + 8x - 5x^2 = 5\left[\frac{4}{5} - \left(x^2 - \frac{8}{5}x\right)\right] = 5\left[\frac{36}{25} - \left(x - \frac{4}{5}\right)^2\right]$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + 8x - 5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5\left[\frac{36}{25} - \left(x - \frac{4}{5}\right)^2\right]}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{36}{25} - \left(x - \frac{4}{5}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{sen}^{-1} \frac{x - 4/5}{6/5} = \frac{1}{\sqrt{5}} \mathrm{sen}^{-1} \frac{5x - 4}{6}$$

Tipo $\displaystyle\int \frac{(Ax + B)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

Consideremos un caso especial, aquel en el que el denominador es $\sqrt{2x^2 + 7x + 8}$, esto es, $(2x^2 + 7x + 8)^{1/2}$. Entonces:

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{2x^2 + 7x + 8}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 + 7x - 8)^{-1/2} \cdot \frac{d}{dx}(2x^2 + 7x - 8) =$$

$$= \frac{1}{2}(2x^2 + 7x - 8)^{-1/2} \cdot (4x + 7) = \frac{1/2(4x + 7)}{\sqrt{2x^2 + 7x - 8}}$$

A partir de este resultado, es evidente que *si el numerador de una fracción de este tipo es la mitad de la derivada de la expresión que se encuentra bajo el signo radical en el denominador, entonces la integral de la fracción es igual al denominador*, esto es:

$$\int \frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

Por ello, al calcular una integral de este tipo, hay que ordenar el numerador de tal forma que una parte de él sea la derivada de la expresión que se encuentra debajo del signo radical en el denominador.

En general, esto da lugar a que quede una constante en el numerador. La expresión se puede entonces dividir en dos fracciones.

Un ejemplo resuelto nos aclarará lo que venimos diciendo.

Ejemplo resuelto

Integrar $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x-3}}$.

Ahora

$$\frac{d}{dx}(2x^2+x-3) = 4x+1$$

Reordenando el numerador:

$$x+1 = \frac{1}{4}(4x+1) + \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4x+1)\right] + \frac{3}{4}$$

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} = \int \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(4x+1)\right] + \frac{3}{4}}{\sqrt{2x^2+x-3}}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(4x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} + \int \frac{\frac{3}{4}dx}{\sqrt{2x^2+x-3}}$$

Como se ha demostrado antes:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(4x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+x-3}$$

También, usando los métodos ya estudiados, encontramos:

$$\int \frac{\frac{3}{4}dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\text{Ch}^{-1}\frac{4x+1}{5}\right)$$

Por tanto,

$$\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{2x^2+x-3}} = \frac{1}{2}\sqrt{2x^2+x-3} + \frac{3}{4\sqrt{2}}\text{Ch}^{-1}\frac{4x+1}{5}$$

12.4. Algunos artificios útiles

Otras funciones irracionales se pueden a veces transformar de manera que se puedan utilizar algunos de los métodos anteriores.

a) Racionalización

En ciertos casos, la racionalización del numerador permite efectuar la integración.

Ejemplo resuelto

Integrar $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

Racionalizando el numerador:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Por tanto:

$$\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \int \frac{(x-1)dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}} - \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \sqrt{x^2-1} - \mathrm{Ch}^{-1}\,x$$

b) Sustitución

Sustituyendo en la expresión irracional la variable x por una nueva variable, como u, se puede simplificar la integral como se muestra en los ejemplos siguientes.

Ejemplos resueltos

1. Integrar $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$.

Sea $x = \frac{1}{u}$ o $u = \frac{1}{x}$. Entonces:

$$dx = -\frac{1}{u^2}\,du$$

Luego

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}+4}} = -\int \frac{\frac{1}{u^2}\,du}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1+4u^2}} =$$

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1+4u^2}} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}^{-1}\,2u = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Sh}^{-1}\frac{2}{x}$$

2. Integrar $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}}$.

Sea $x = \frac{1}{u}$ y $u = \frac{1}{x}$. Entonces:

$$dx = -\frac{du}{u^2}$$

Por tanto:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x+1}} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{u^2}-\frac{1}{u}+1}} = \int \frac{-\frac{1}{u^2}\,du}{\frac{1}{u^2}\sqrt{1-u+u^2}} =$$

(Utilizando el método del Ap. 12.13.)

$$= -\int \frac{du}{\sqrt{1-u+u^2}} = -\mathrm{Sh}^{-1}\frac{2u-1}{\sqrt{3}} =$$

$$= -\mathrm{Sh}^{-1}\frac{\frac{2}{x}-1}{\sqrt{3}} = -\mathrm{Sh}^{-1}\frac{2-x}{x\sqrt{3}}$$

EJERCICIOS

Integrar las expresiones siguientes:

1. $\dfrac{xdx}{x+2}$.

2. $\displaystyle\int \frac{xdx}{1-x}$.

3. $\dfrac{xdx}{a+bx}$.

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{x-1}\,dx$.

5. $\displaystyle\int \frac{1-x}{1+x}\,dx$.

6. $\displaystyle\int \frac{2x-1}{2x+3}\,dx$.

7. $\displaystyle\int \frac{x^2}{x+2}\,dx$.

8. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{1-x}$.

9. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{3x-1}$.

10. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{a+bx}$.

11. $\displaystyle\int \frac{3x^3dx}{x+2}$.

12. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x-1}$.

13. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1}$.

14. $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^2}$.

15. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{x^2-4}$.

16. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-9}$.

17. $\displaystyle\int \frac{x+8}{x^2+6x+8}\,dx$.

18. $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2+x-6}\,dx$.

19. $\displaystyle\int \frac{8x+1}{2x^2-9x-35}\,dx$.

20. $\displaystyle\int \frac{x+1}{3x^2-x-2}\,dx$.

21. $\displaystyle\int \frac{7x-8}{4x^2+3x-1}\,dx$.

22. $\displaystyle\int \frac{1+x}{(1-x)^2}\,dx$.

23. $\int \frac{2x - 1}{(x + 2)^2} dx.$

24. $\int \frac{2x + 1}{(2x + 3)^2} dx.$

25. $\int \frac{x^2 - 2}{x^2 - x - 12} dx.$

26. $\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - x - 2} dx.$

27. $\int \frac{2x^3 - 2x^2 - 11x - 8}{x^2 - x - 6} dx.$

28. $\int \frac{x^3 - 2x^2 - 1}{x^2 - 1} dx.$

29. $\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}.$

30. $\int \frac{dx}{x^2(x + 2)}.$

31. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x(x - 1)(x + 2)}.$

32. $\int \frac{(x^2 - 3)dx}{(x - 1)(x - 2)(x + 3)}.$

33. $\int \frac{(2x + 1)dx}{(x + 2)(x - 3)^2}.$

34. $\int \frac{xdx}{(x + 1)^2(x - 1)}.$

35. $\int \frac{(x^3 + 1)dx}{x(x - 1)^3}.$

36. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)}.$

37. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x - 2)}.$

38. $\int \frac{xdx}{(x + 1)(x^2 + 4)}.$

39. $\int \frac{(x + 2)dx}{(x^2 + 4)(1 - x)}.$

40. $\int \frac{xdx}{x^4 - 1}.$

41. $\int \frac{x^2dx}{x^4 - 1}.$

42. $\int \frac{(x + 1)^2dx}{x^3 + x}.$

43. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 17}.$

44. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x - 4}.$

45. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 6}.$

46. $\int \frac{dx}{2x^2 + 2x + 7}.$

47. $\int \frac{(1-3x)dx}{3x^2+4x+2}$.

48. $\int \frac{(4x-5)dx}{x^2-2x-1}$.

49. $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+4x+5}$.

50. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

51. $\int \frac{(x-1)^2dx}{x^2+2x+2}$.

52. $\int \frac{(3x+5)dx}{1-2x-x^2}$.

53. $\int \frac{(4x+5)dx}{3x^2+x+3}$.

54. $\int \frac{x^2+1}{x^3+1}dx$.

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$.

56. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+4}}$.

57. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+2}}$.

58. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

59. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2-12x+4}}$.

60. $\int \frac{dx}{\sqrt{x(4-x)}}$.

61. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$.

62. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

63. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{x^2-1}}$.

64. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

65. $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

66. $\int \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$.

67. $\int \frac{(2x+3)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

68. $\int \frac{(x+2)dx}{\sqrt{x^2+2x-1}}$.

69. $\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}dx$.

70. $\int \sqrt{\frac{2x+3}{2x-3}}dx$.

71. $\int \sqrt{\frac{x}{x+3}}\,dx.$ **72.** $\int \sqrt{\frac{x+1}{2x-3}}\,dx.$

73. $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}.$
(Racionalizar el denominador.)

74. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+6x+10}}.$

75. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x+x^2}}.$ **76.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{3x^2+4x+1}}.$

77. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+4x+2}}.$
(Sustituir $x+1=1/u$.)

78. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$

79. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx.$
(Racionalizar el numerador.)

80. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$
(Sustituir $x = \operatorname{tg} u$.)

81. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$ **82.** $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

83. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x}}.$

84. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x+2}}.$
(Sustituir $\sqrt{x+2}=u$.)

85. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

13 Determinación de áreas mediante cálculo integral. Integrales definidas

13.1. Determinación de áreas por integración

El cálculo integral tiene su origen en el intento de hallar un método general para la determinación de las áreas de figuras regulares. Cuando esas figuras están limitadas por líneas rectas, la geometría elemental suministra los medios para obtener las fórmulas de esas áreas; pero cuando los límites son, o en todo o en parte, curvas regulares, como el círculo, la elipse, el semicírculo, etc., entonces, a menos que dispongamos de la ayuda del cálculo integral, sólo podrán usarse métodos experimentales o aproximados. Vamos a estudiar, por tanto, cómo se puede utilizar la integración para determinar áreas de esta clase.

Consideremos, por ejemplo, la parábola

$$y = x^2$$

En la figura 13.1, OA representa una parte de esta curva.

Sea A un punto cualquiera de la curva y AB la ordenada correspondiente, y sea $OB = a$ unidades.

Supongamos que se quiere calcular el área que está bajo OA, esto es, el área de OAB limitada por la curva, OX y AB.

Sea A el área en unidades de superficie, P un punto cualquiera de la curva OA, y sean sus coordenadas (x,y).

Trazando la ordenada PQ, tenemos $OQ = x$, $PQ = y$.

Supongamos que se aumenta el área en una pequeña cantidad, δA, por desplazamiento del punto P a lo largo de la curva hasta M, y por desplazamiento de Q hasta N a lo largo del eje OX.

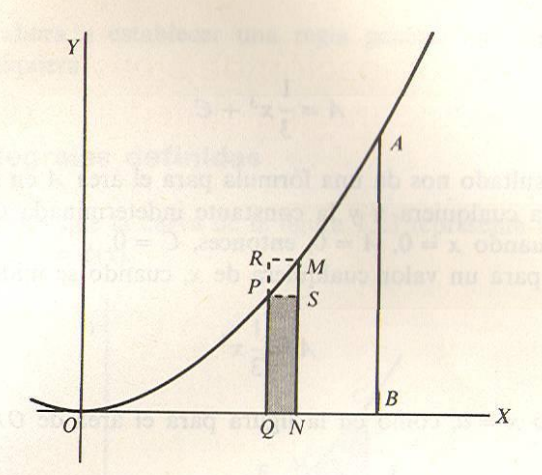


Figura 13.1

Trazar PS y MR paralelas a OX y prolongar QP hasta cortar a MR en R.

Entonces podemos representar QN por δx y MS por δy

$$ON = x + \delta x$$
$$MN = y + \delta y$$

δA también se representa por la figura $QPMN$.

El área $QPMN$ está comprendida entre las áreas de $QRMN$ y $QPSN$, y

área de $QRMN$ es $(y + \delta y)\delta x$

área de $QPSN$ es $y\delta x$

Luego δA está comprendida entre $y\delta x$ e $(y + \delta y)\delta x$.

$\delta A/\delta x$ está comprendida entre y e $y + \delta y$.

Supongamos ahora que δx disminuye indefinidamente.

Entonces, cuando $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$, y $\delta A/\delta x$ se convierte en dA/dx en el límite, esto es, en el límite

$$\frac{dA}{dx} = y = x^2$$

$$dA = x^2 dx$$

Integrando:

$$A = \frac{1}{3}x^3 + C$$

Este resultado nos da una fórmula para el área A en función de una abscisa cualquiera x y la constante indeterminada C.

Pero cuando $x = 0$, $A = 0$; entonces, $C = 0$.

Luego para un valor cualquiera de x, cuando se mide desde O,

$$A = \frac{1}{3}x^3$$

Cuando $x = a$, como en la figura para el área de OAB

$$A = \frac{1}{3}a^3 \text{ unidades de superficie}$$

Si ahora se toma otro valor de x, por ejemplo b, de modo que OD en la figura 13.2 $= b$, entonces, por el resultado anterior:

$$\text{Área de } OCD = 1/3b^3$$

$$\text{Área de } CDBA = 1/3(a^3 - b^3)$$

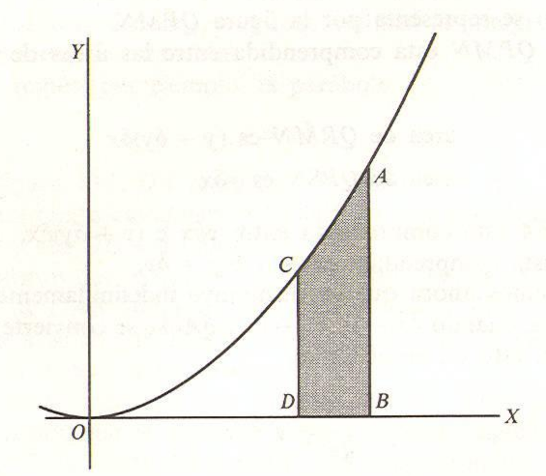


Figura 13.2

Vamos ahora a establecer una regla general aplicable a una función cualquiera.

13.2. Integrales definidas

Supongamos que la curva de la figura 13.3 representa una parte de la función $y = \phi(x)$.

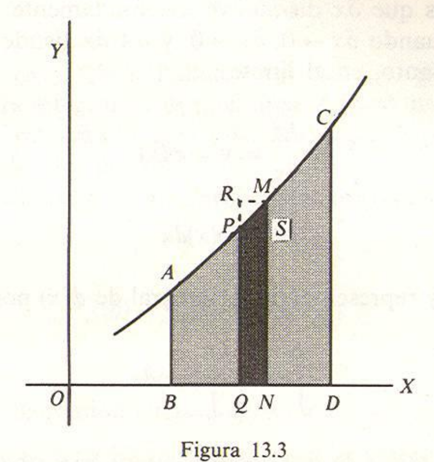


Figura 13.3

Sean AB y CD ordenadas fijadas de tal modo que

$$OB = a, \quad OD = b$$

Sea $ABCD$ una variable que deseamos hallar y sea A el área en cm^2, y sea PQ la ordenada de una variable correspondiente a un punto cualquiera, (x,y), tal que $OQ = x$, $PQ = y = \phi(x)$. Entonces, si Q se desplaza a lo largo de OX de tal forma que x aumenta en δx (esto es, QN), P, en consecuencia, se desplazará a lo largo de la curva hasta M.

Trácese PS y MR paralelas a OX. Entonces:

$$MS = \delta y$$
$$MN = y + \delta y$$

también

$$ON = x + \delta x$$

Aumentemos el área en δA, siendo δA la figura $PQNM$.

Entonces el área $PQNM$ cae entre las áreas de $PQNS$ y $QRMN$, luego δA cae entre ydx e $(y + \delta y)dx$, y $\delta A/\delta x$ está comprendido entre y e $(y + \delta y)$.

Supongamos que δx disminuye indefinidamente.

Entonces, cuando $\delta x \to 0$, $\delta y \to 0$, y $\delta A/\delta x$ tiende a dA/dx como su límite. Por tanto, en el límite,

$$\frac{dA}{dx} = y = \phi(x)$$

$$dA = \phi(x)dx$$

Integrando y representando la integral de $\phi(x)$ por $f(x)$, tenemos:

$$\int dA = \int \phi(x)dx$$

y

$$A = f(x) + C \qquad (1)$$

siendo C una constante indeterminada. Su valor se puede determinar cuando se conoce el valor de A para un cierto valor de x.

Ahora A se considera que representa el área $ABDC$, esto es, el área entre las ordenadas en las que $x = a$ y $x = b$, y la ordenada de la variable se desplaza de $x = a$ a $x = b$. Pero cuando

$$x = a, \quad A = 0$$

Sustituyendo en (1),

$$0 = f(a) + C$$

$$C = -f(a)$$

Cuando

$$x = b$$

$$A = f(b) + C$$

Sustituyendo el valor de C encontrado:

$$A = f(b) - f(a) \qquad (2)$$

Puesto que $f(a)$ y $f(b)$ se hallan sustituyendo x por a y b en $f(x)$ que representa la integral de $\phi(x)$, el área A entre estos límites a y b se puede hallar integrando $\phi(x)$ y sustituyendo los valores $x = a$ y $x = b$, y restando $f(a)$ de $f(b)$.

Esto se puede expresar de forma más conveniente mediante la notación

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \phi(x)dx$$

$\int_a^b \phi(x)dx$ se denomina *integral definida* y a y b son sus límites de integración, siendo a el límite inferior y b el límite superior.

Para evaluar una integral definida como $\int_a^b \phi(x)dx$:

1. Hallar la integral indefinida $\int \phi(x)dx$, esto es, $f(x)$.
2. Sustituir b por x en el límite superior, esto es, $f(b)$.
3. Sustituir a por x en el límite inferior, esto es, $f(a)$.
4. Restar $f(a)$ de $f(b)$.

En la práctica es mejor utilizar la siguiente notación y ordenación

$$\int_a^b \phi(x)dx = \Big[\, f(x) \,\Big]_a^b = f(b) - f(a)$$

13.3. Características de una integral definida

Se deben advertir cuidadosamente los siguientes puntos acerca de una integral definida:

a) Los resultados de sustituir los límites en la integral son $f(a) + C$ y $f(b) + C$, respectivamente. Por consiguiente, al sustraer desaparece la constante C, de ahí el término «definida» de esta integral. Si a y b son números, la integral será también un número.

b) Se supone que la variable aumenta desde el límite inferior al límite superior, esto es, de a a b, en el caso anterior. Esto debe recordarse cuidadosamente cuando se manejan límites negativos. Si, por ejemplo, los límites son -2 y 0, entonces la variable x crece de -2 a 0. Por consiguiente, el límite superior es 0 y el inferior -2.

Esta integral definida debería, por tanto, escribirse como

$$\int_{-2}^{0} \phi(x)dx$$

c) El término *límite* en este contexto no tiene el significado que se le ha dado a la palabra previamente en el apartado 2.3. Denota los valores de la variable x en los extremos del intervalo de valores *a-b* en el que estamos calculando el valor de la integral definida.

Ejemplos resueltos

1. Calcular la integral definida $\int_2^5 3xdx$.

Tenemos:

$$\int 3xdx = \frac{3}{2}x^2 + C$$

$$\int_2^5 3xdx = \frac{3}{2}\Big[x^2\Big]_2^5 = \frac{3}{2}[(5)^2 - (2)^2] = \frac{3}{2} \times 21 = \frac{63}{2}$$

Es un ejercicio útil comprobar el valor de esta integral representando gráficamente $y = 3x$, trazando las ordenadas en $x = 2$ y $x = 5$ y calculando el área del trapecio resultante por las reglas ordinarias de la geometría.

2. Calcular la integral definida $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx$.

Ahora

$$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$$

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = \left[\left(-\cos\frac{\pi}{2} \right) - (-\cos 0) \right] = 0 + 1 = 1$$

Nota. Este resultado nos da, en unidades de superficie, el valor del área debajo de la curva $y = \operatorname{sen} x$ entre 0 y $\pi/2$. En la figura 13.4 se muestra una gráfica de esta función entre 0 y π. Claramente, por simetría, el área de la curva entre 0 y π es el doble del área de la curva entre 0 y $\pi/2$, esto es, 2 unidades de superficie. Esto puede comprobarse calculando $\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx$.

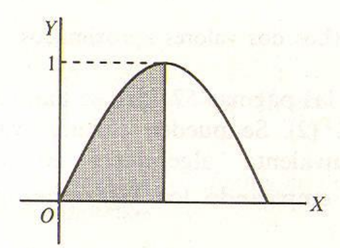


Figura 13.4

3. Calcular $\int_0^1 xe^{x^2} dx$.

Ahora

$$\int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C \; ; \int_0^1 xe^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}(e - 1)$$

4. Calcular la integral definida $\int_{-1}^{0} (1 + 3x - 2x^2)dx$.

$$\int (1 + 3x - 2x^2)dx = x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3$$

$$\int_{-1}^{0} (1 + 3x - 2x^2)dx = \left[x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-1 + \frac{3}{2} + \frac{2}{3} \right) = -\frac{7}{6}$$

5. Calcular la integral definida $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Puesto que

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \text{Ch}^{-1}x$$

$$\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \left[\text{Ch}^{-1}x \right]_{2}^{3} = \text{Ch}^{-1}(3) - \text{Ch}^{-1}(2) =$$

$$= 1{,}763 - 1{,}316 = 0{,}447$$

(Los dos valores aproximados.)

En las tablas de las páginas 521-526 se dan valores aproximados de $\text{Ch}^{-1}(3)$ y $\text{Ch}^{-1}(2)$. Se pueden calcular valores más exactos utilizando el equivalente algebraico de $\text{Ch}^{-1}x$, a saber, $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ y empleando los logaritmos hiperbólicos de las páginas 523-524.

6. Calcular la integral definida $\int_{1}^{e} x \ln x dx$.

A partir del resultado del ejercicio 87 del capítulo 11, tenemos:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)\right]_1^e = \frac{e^2}{2}\left(\ln e - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\ln 1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \times \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

13.4. Algunas propiedades de las integrales definidas

1. Intercambio de límites

Sea $\phi(x)$ la integral definida de $f(x)$.
Entonces, si los límites de la integral definida son a y b:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

Si se intercambian los límites

$$\int_b^a f(x)dx = \phi(a) - \phi(b)$$

Esto es,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Por tanto, al intercambiarse los límites de integración sólo cambia el signo de la integral definida.

2. $\displaystyle\int_a^b \boldsymbol{f(x)dx} = \int_c^b \boldsymbol{f(x)dx} + \int_a^c \boldsymbol{f(x)dx}$

Sea $\phi(x)$ la integral definida de $f(x)$. Entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

y también

$$\int_c^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(c)$$

y

$$\int_a^c f(x)dx = \phi(c) - \phi(a)$$

Luego

$$\int_c^b f(x)dx + \int_a^c f(x)dx = [\phi(b) - \phi(c)] + [\phi(c) - \phi(a)] =$$

$$= \phi(b) - \phi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

En la figura 13.2 se ilustra gráficamente este teorema. Claramente,

Área AOB = Área $ABCD$ + Área OCD

Esto es,

$$\int_0^a f(x)dx = \int_b^a f(x)dx + \int_0^b f(x)dx$$

3. Puesto que $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$, siendo $\phi(x)$ la integral indefinida de $\int f(x)dx$, entonces, como la integral definida $\phi(b) - \phi(a)$ no contiene x, se puede usar cualquier otra letra en la integral siempre que la función de cada una de las dos letras en la suma sea la misma.

Para

$$\int_a^b f(y)dy = \phi(b) - \phi(a)$$

Pero para

$$\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(y)dy$$

4. $\displaystyle\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

Sea $x = a - u$ o $a - x = u$.

Entonces: $dx = -du$.

Ahora, *si en la integración definida se cambia la variable, también se cambiarán los límites y hay que determinar los nuevos límites.*

Luego en el caso anterior, cuando $x = a$,

$$u = a - x = a - a = 0$$

Cuando $x = 0$,

$$u = a - x = a - 0 = a$$

Así, cuando $x = a$, $u = 0$, y cuando $x = 0$, $u = a$.

Por ello, cuando sustituimos x por $a - u$ en $\displaystyle\int_0^a f(x)dx$, los límites deben cambiarse por los que se han calculado:

$$\int_0^a f(x)dx = -\int_a^0 f(a-u)du =$$

$$= \int_0^a f(a-u)du = \qquad \text{[Por la propiedad (1).]}$$

$$= \int_0^a f(a-x)dx \qquad \text{[Por la propiedad (3).]}$$

Ejemplo resuelto

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x dx = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\pi/2} \cos x dx$$

En general,

$$\int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx$$

13.5. Límites de integración infinitos e integrales infinitas: integrales impropias

En el cálculo de las integrales definidas entre los límites a y b se ha supuesto:

1. Que estos límites son finitos.
2. Que todos los valores de la función entre ellos también son finitos, esto es, que la función es continua.

Debemos, sin embargo, considerar ahora algunos casos en los que no se satisfacen alguna o ninguna de estas dos condiciones. En tales casos, la integral se llama impropia.

13.6. Límites infinitos de integración

Los problemas que surgen cuando uno de los límites de la integral es infinito se pueden ilustrar considerando el caso de $y = 1/x^2$.

Al estudiar esta función será útil referirse a su representación gráfica que, en parte, se presenta en la figura 13.5. Al ser los valores de $1/x^2$ siempre positivos, la curva de la función se mantiene siempre por encima del eje OX. Consta de dos ramas, correspondientes a valores positivos y negativos, y claramente simétricos respecto al eje OY.

Sean P y Q dos puntos de la curva, PA y QB las ordenadas correspondientes, y sean $OA = a$ y $OB = b$.

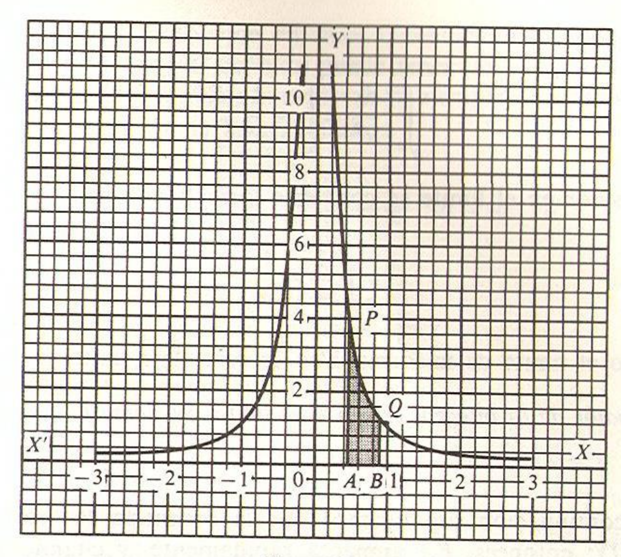


Figura 13.5

Entonces, como se indica en el apartado 13.2, el área debajo de la parte de la curva PQ limitada por PA, QB y OX es la parte sombreada de la figura, y se representa por

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^b = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

1. Supongamos que la ordenada QB se aparte indefinidamente de OY, de manera que $OB = b$ se aumenta indefinidamente.

Entonces, la ordenada QB disminuye indefinidamente y en el límite OX es una asíntota a la curva (apartado 2.2), esto es, cuando $b \to \infty$, $QB \to 0$.

La integral definida se puede escribir ahora:

$$\int_a^{b \to \infty} \frac{dx}{x^2}$$

o, más convenientemente,

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_a^{\infty}$$

Su valor en el límite se convierte formalmente en:

$$-\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{a} \right)$$

Pero el límite de la forma $1/\infty$ es cero. Por tanto:

*El valor de la integral es 1/*a *y es finito. Se llama finita o convergente.*

2. A continuación supongamos que la ordenada PA se traslada hacia OY; entonces, PA aumenta rápidamente, y cuando $OA = a$ disminuye indefinidamente; la ordenada, esto es, el valor de y, aumenta indefinidamente. Por ello, cuando $a \to 0$, $y \to \infty$.

La integral definida se puede ahora escribir así:

$$\int_{a \to 0}^{b} \frac{dx}{x^2} \quad \text{o} \quad \int_0^b \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_0^b = -\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{0} \right)$$

En el límite la forma 1/0 se hace infinita. La integral se llama infinita o divergente.

Por tanto, la integral definida se hace infinita, y no se puede calcular numéricamente.

Al mismo tiempo, OY se convierte en la asíntota de la curva.

Por tanto, concluimos que en la integral definida $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$:

a) Si x se hace infinitamente grande, cuando y se hace infinitamente pequeña, la integral impropia tendrá un *valor finito;* y se dice que converge o es convergente.

b) Si x se hace infinitamente pequeña, cuando y se hace infinitamente grande, la integral impropia *no tiene un valor finito;* y se dice que diverge o es divergente.

Es claro, por tanto, que en tales casos debemos investigar y determinar si la integral definida puede tener un valor finito o no.

A continuación, vamos a considerar un ejemplo en el que los dos límites de integración se hacen infinitos.

$$\int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[\operatorname{tg}^{-1} x \right]_a^b = \operatorname{tg}^{-1} b - \operatorname{tg}^{-1} a$$

— Si $b \to \infty$, entonces $\operatorname{tg}^{-1} b \to \pi/2$.

— Si $a \to -\infty$, entonces $\operatorname{tg}^{-1} a \to -\pi/2$.

Entonces, en el límite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \quad \text{se convierte en} \quad \left[\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \pi$$

Por tanto, hay un valor finito de la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Es convergente.

13.7. Funciones con valores infinitos

Vamos ahora a considerar funciones que se hacen infinitas para algún valor o valores de la variable entre los límites de la integral definida, esto es, funciones discontinuas.

Un ejemplo es la función $1/x^2$, que hemos visto anteriormente; se hace infinita cuando $x = 0$, como se ha demostrado. Si se pretende, por tanto, calcular el valor de la integral $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2}$, es evidente que la función se hace infinita para un valor de x entre los límites de la integral, a saber, para $x = 0$.

Si se calcula $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2}$ por los métodos ordinarios, sin tener en cuenta este valor infinito, el resultado es el siguiente:

$$\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-2}^{+2} = -\left[\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = -1$$

Pero este resultado es diferente del obtenido anteriormente cuando se demostró que $\int_0^{+2} \frac{dx}{x^2}$ diverge.

Como $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{x^2}$ debe ser la suma de aquéllas $\left(\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_0^2 \frac{dx}{x^2}\right)$ (apartado 13.4), debe ser también divergente.

Es necesario, por tanto, antes de calcular ciertas integrales, saber si la función es continua entre los límites asignados, o si se hace infinita para algún valor de x.

Esto es especialmente necesario en el caso de las funciones fraccionarias en las que, mientras que el numerador permanece finito, el denominador se anula para uno o más valores de x.

Así, $\frac{x}{(x-1)(x-2)}$ se hace infinito y la curva es, por tanto, discontinua:

1. Cuando $(x - 1) = 0$, esto es, $x = 1$.
2. Cuando $(x - 2) = 0$, esto es, $x = 2$.

De igual modo, en $\frac{1}{\sqrt{2-x}}$, el denominador es cero cuando $x = 2$, o más exactamente, cuando $x \to 2$. Consiguientemente, la función tiende a infinito cuando $x \to 2$.

Todos estos casos deben ser examinados para ver si existe un límite finito y, por tanto, un valor definido de la integral. Con este objeto, se puede emplear la propiedad de una integral tal como queda dicho en el apartado 13.4. Al utilizar este teorema, la integral que se quiere examinar se expresa como la suma de dos integrales en las que el valor de la variable que hace infinita a la función se utiliza como uno de los límites. Cada una de las integrales debe tener un valor finito si la integral original es convergente y su valor vendrá dado por esa suma.

Un ejemplo de esto se ha dado anteriormente, cuando se indicó que $\int_{-2}^{+2} \frac{dx}{x^2}$, cuando se expresa como la suma de $\int_0^{+2} \frac{dx}{x^2}$ y $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{x^2}$, debía diverger, lo cual no significa nada, ya que se había demostrado que cada una de las dos integrales componentes eran divergentes. A continuación, se da otro ejemplo en el que se emplea un método para determinar si una integral definida dada es o no divergente.

Ejemplo resuelto

Determinar si la integral definida $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$ converge.

La integral tiende a infinito cuando $x \to 2$.

Utilizando el teorema dado antes (Ap. 13.4), la integral se puede expresar de la manera siguiente:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} + \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}}$$

Es necesario, si la integral original ha de tener un valor finito, que cada una de estas integrales sea finita. Por tanto, las comprobamos por separado.

En la primera, sustituyamos el valor extremo «2» por $2 + \alpha$, siendo α un número pequeño positivo.

1. Entonces,

$$\int_{2+\alpha}^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2}\left[(x-2)^{2/3}\right]_{2+\alpha}^3 =$$

$$= \frac{3}{2}\{[(3-2)^{2/3}] - [(2+\alpha)-2]^{2/3}\} =$$

$$= \frac{3}{2}(1-\alpha^{2/3}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\alpha^{2/3}$$

Cuando $\alpha \to 0$ entonces $(2+\alpha) \to 2$, y el valor de la integral tiende a 3/2. Entonces, en el límite el valor de la integral es 3/2. Por tanto, es convergente.

2. $$\int_0^{2-\alpha} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2}\left[(x-2)^{2/3}\right]_0^{2-\alpha} =$$

$$= \frac{3}{2}\{[2-\alpha)-2]^{2/3} - (0-2)^{2/3}\}$$

$$= \frac{3}{2}[(-\alpha)^{2/3} - (-2)^{2/3}]$$

En el límite, cuando $\alpha \to 0$, $(-\alpha)^{2/3} \to 0$ y el valor de la integral es $-3/2(-2)^{2/3} = -3/2\sqrt[3]{4}$.

Como cada una de las integrales definidas tiene un valor finito, la integral total converge y es igual a la suma de las dos integrales.

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-2}} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} = \frac{3}{2}(1 - \sqrt[3]{4})$$

EJERCICIOS

Calcular las integrales definidas siguientes:

1. $\int_1^3 x^n dx$, donde $n \neq -1$. **2.** $\int_0^1 (x^2 + 4)dx$.

3. $\int_1^2 (x^2 + 3x - 5)dx$. **4.** $\int_{-2}^1 (2x + 1)^2 dx$. **5.** $\int_1^{10} x^{-0.8} dx$.

6. $\int_1^4 \sqrt{x}dx$. **7.** $\int_0^4 (x^{1/2} + x^{-1/2})dx$. **8.** $\int_0^{\pi/6} \cos 3x dx$.

9. $\int_0^{\pi/2} (\cos\theta - \operatorname{sen} 2\theta)d\theta$. **10.** $\int_0^{\pi/4} \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{4}\right)d\theta$.

11. $\int_{-1}^1 2^x dx$. **12.** $\int_0^2 e^{(1/2)x} dx$. **13.** $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$.

14. $\frac{1}{2}\pi p \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx$. **15.** $\int_a^b e^{kx} dx$.

16. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x dx$. **17.** $\int_2^3 \frac{x dx}{1 + x^2}$. **18.** $\int_0^{\pi/2} x \operatorname{sen} x dx$.

19. $\int_0^1 x \ln x dx.$ **20.** $\int_0^1 x^2 \ln x dx.$ **21.** $\int_0^1 \operatorname{sen}^{-1} x dx.$

22. $\int_0^1 \operatorname{tg}^{-1} x dx.$ **23.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$ **24.** $\int_1^2 \sqrt{1+3x}\, dx.$

25. $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt{4-x}}.$ **26.** $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}.$ **27.** $\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}.$

28. $\int_0^a \frac{dx}{a^2+x^2}.$ **29.** $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$ **30.** $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}.$

31. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$ **32.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}.$

33. $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx.$ **34.** $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x dx.$ **35.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{12-4x-x^2}}.$

36. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$ **37.** $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(x-2)^3}.$

38. $\int_a^\infty \frac{dx}{x}.$ **39.** $\int_2^\infty \frac{dx}{x^3}.$ **40.** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}.$

41. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1}.$ **42.** $\int_2^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}.$ **43.** $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$

44. $\int_0^\infty e^{-x} \cos x dx.$ **45.** $\int_0^\infty \frac{xdx}{1+x^2}.$ **46.** $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2(1+x)}.$

47. $\int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x)^2}.$ **48.** $\int_0^1 \frac{dx}{x}.$ **49.** $\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}}\, dx.$

50. $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\, dx.$ **51.** $\int_{0}^{1} x \ln x dx.$

52. $\int_{-1}^{1} \frac{1+x}{1-x}\, dx.$ **53.** $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx.$ **54.** $\int_{0}^{1} \ln x dx.$

55. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$ **56.** $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(x-1)^2}.$ **57.** $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}.$

14 La integración como suma. Áreas

14.1. Aproximación a un área mediante la división en pequeños elementos

En el capítulo precedente se ha visto cómo, con ayuda de la integración, se puede calcular el área de una figura limitada en parte por una curva regular de ecuación conocida. Consideramos ahora otro tratamiento, más general, del problema.

En la figura 14.1 sea AB una porción de una curva de ecuación $y = \phi(x)$, y sean AM y BN las ordenadas de A y B, de modo que

$$OM = a,\ ON = b \quad ; \quad AM = \phi(a),\ BN = \phi(b)$$

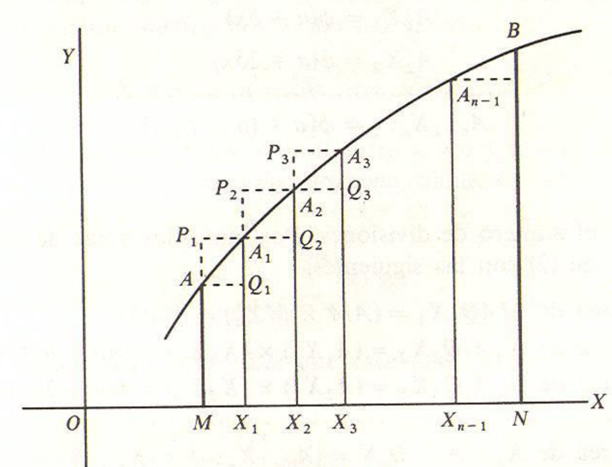


Figura 14.1.

Sean (x, y) las coordenadas de A. $ABNM$ es la figura cuya área se quiere calcular.

Dividimos MN en n partes iguales, X_1, X_2, X_3, ... Entonces, MX_1 se puede representar por δx. De ahí, cada una de las divisiones X_1X_2, X_2X_3, ... es igual a δx.

Sean A_1X_1, A_2X_2, A_3X_3, ... las ordenadas correspondientes a los números A_1, A_2, A_3, ... Completamos los rectángulos $AP_1A_1Q_1$, $A_1P_2A_2Q_2$, $A_2P_3A_3Q_3$, ... Tenemos ahora dos conjuntos de rectángulos correspondientes a las divisiones MX_1, $X_1 \cup X_2$,...

$$MP_1A_1X_1,\ X_1P_2A_2X_2,\ X_2P_3A_3X_3,\ \ldots \qquad (1)$$

$$MAQ_1X_1,\ X_1A_1Q_2X_2,\ X_2A_2Q_3X_3,\ \ldots \qquad (2)$$

El área abarcada por la curva, esto es, área de la figura $MABN$, está entre las sumas de las áreas de los rectángulos en los conjuntos (1) y (2).

Si se aumenta indefinidamente el número de divisiones, δx disminuirá indefinidamente, y el área de cada uno de los conjuntos (1) y (2) tenderá a igualarse con el área bajo la curva. Es necesario, por tanto, hallar expresiones para las sumas de estos conjuntos y luego obtener sus valores límites cuando $\delta x \to 0$.

Las ordenadas se pueden expresar, asimismo, como:

$$AM = \phi(a)$$
$$A_1X_1 = \phi(a + \delta x)$$
$$A_2X_2 = \phi(a + 2\delta x)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{n-1}X_{n-1} = \phi[a + (n-1)\delta x]$$

y

$$BN = \phi(b)$$

siendo n el número de divisiones. Por tanto, las áreas de estos rectángulos en (2) son las siguientes:

— Área de $MAQ_1X_1 = (AM \times MX_1) = \phi(a)\delta x$
— Área de $X_1A_1Q_2X_2 = (A_1X_1) \times (X_1X_2) = \phi(a + \delta x)\delta x$
— Área de $X_2A_2Q_3X_3 = (A_2X_2) \times (X_2X_3) = \phi(a + 2\delta x)\delta x$

....

— Área de $X_{n-1}A_{n-1}Q_nN = (A_{n-1}X_{n-1}) \times (X_{n-1}N) =$
$= \phi[a + (n-1)\delta x]\delta x$

La suma de todos estos rectángulos es:

$$\delta x\{\phi(a) + \phi(a + \delta x) + \cdots + \phi[a + (n - 1)\delta x]\} \qquad (A)$$

Similarmente, la suma de todos los rectángulos en (1) es:

$$\delta x\{\phi(a + \delta x) + \phi(a + 2\delta x) + \cdots + \phi[a + (n - 1)\delta x] + \phi(b)\} \qquad (B)$$

El área de la figura $AMNB$ está entre (A) y (B). Entonces:

$$(B) - (A) = \delta x[\phi(b) - \phi(a)]$$

En el límite, cuando $\delta x \to 0$, esta diferencia se hace cero. Por tanto, cada una de las áreas tiende al área de $AMNB$.

Luego el área es el límite de la suma de (A) *o de* (B).

La suma de este tipo de series se puede expresar concisamente mediante el uso del símbolo griego Σ *(sigma)*, la mayúscula de la letra griega equivalente a nuestra «s». Utilizando este símbolo, la suma de las series se puede escribir:

$$\sum_{x=a}^{x=b} \phi(x)\delta x$$

Con esta expresión se quiere significar la suma de términos del tipo $\phi(x)dx$ cuando sustituimos x por los valores

$$a,\ a + \delta x,\ a + 2\delta x,\ a + 3\delta x,\ \ldots$$

para todos los valores posibles de x entre $x = a$ y $x = b$.

El área $AMNB$ es *el límite de esta suma* cuando $\delta x \to 0$, y esto se escribe así:

$$A = \lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \phi(x)\delta x$$

Pero hemos visto (Ap. 13.2) que esta área viene dada por la integral

$$\int_a^b \phi(x)dx$$

Luego

$$\lim_{\delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} \phi(x)dx = \int_a^b \phi(x)dx$$

14.2. La integral definida como el límite de una suma

Es claro, por tanto, que una integral definida puede considerarse como una suma, o más correctamente, el «límite de una suma» de las áreas de un infinito número de rectángulos, uno de cuyos lados (*dx* en el caso anterior) es infinitesimalmente pequeño.

El uso del término integral aparece ahora con mayor claridad, pues la palabra integrar significa «dar la suma total». La primera letra de la palabra «suma» aparece en el signo $\int$, que es la forma alargada antigua y desusada de la letra «s». También resulta evidente por qué el infinitésimo *dx* debe figurar necesariamente como un factor en una integral.

La integral definida se ha utilizado anteriormente para referirnos a la suma de áreas. Esto, sin embargo, es sólo un procedimiento para ilustrar el proceso mediante un ejemplo geométrico familiar. Así, se calculó la integral mediante la suma de un número infinito de productos algebraicos, uno de cuyos factores, en el límite, se hacía infinitamente pequeño. El mismo resultado, por su parte, se puede obtener independientemente de cualquier procedimiento geométrico.

Consiguientemente, $\int_a^b \phi(x)dx$ se puede considerar como la representación de la suma de un número infinito de productos, uno de cuyos factores es una cantidad infinitesimalmente pequeña. Los productos sucesivos deben ser de la misma clase que los que aparecían en la anterior demostración y se deben referir a los valores sucesivos de la variable independiente, x, entre los límites $x = b$ y $x = a$.

Si éste es el caso, el método se puede aplicar a la suma de cualquiera de estas series, siempre que cumplan las condiciones previamente establecidas.

Esto tiene una gran importancia en la práctica, pues nos permite calcular no sólo áreas, sino también volúmenes, longitudes de curvas,

centros de masas, momentos de inercia, etc., que se puedan expresar en la forma $\sum_{x=a}^{x=b} \phi(x)dx$. Todos ellos pueden, entonces, representarse mediante la integral definida $\int_a^b \phi(x)dx$.

Aunque en la demostración anterior se ha considerado que $\phi(x)$ aumenta constante y continuamente, los argumentos empleados se aplican igualmente cuando $\phi(x)$ disminuye. Es esencial, sin embargo, que el intervalo de valores de x entre a y b pueda dividirse en un número definido de partes, y que los valores correspondientes de $\phi(x)$ aumenten o disminuyan continuamente.

Las aplicaciones prácticas de estas conclusiones son innumerables y en los capítulos siguientes se discutirán algunas de ellas.

La aplicación más obvia, a la vista del método seguido en la demostración, es la del cálculo de áreas. Por tanto, comenzamos examinando varios ejemplos de este cálculo.

14.3. Ejemplos de cálculo de áreas

1. Calcular el área comprendida entre la curva $y = 1/2(x^2)$, el eje OX y la ordenada de la curva correspondiente a $x = 2$.

La parte implicada de la curva se indica con OQ en la figura 14.2, en la que la ordenada de Q corresponde al punto $x = 2$.

El área buscada es la OAQ, indicada por el sombreado más oscuro.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva, tal que $ON = x$. Auméntese x en δx y trazando la ordenada correspondiente queda un pequeño rectángulo, como se ve en la figura 14.2. El área de este rectángulo es aproximadamente $y\delta x$.

Cuando δx se hace infinitamente pequeño, la suma de las áreas de todos esos rectángulos en todo el intervalo de $x = 0$ a $x = 2$ es igual al área buscada.

El área del rectángulo pequeño es ydx.

Este rectángulo se llama un *elemento de área* y siempre es necesario obtener este elemento antes de proceder a la solución.

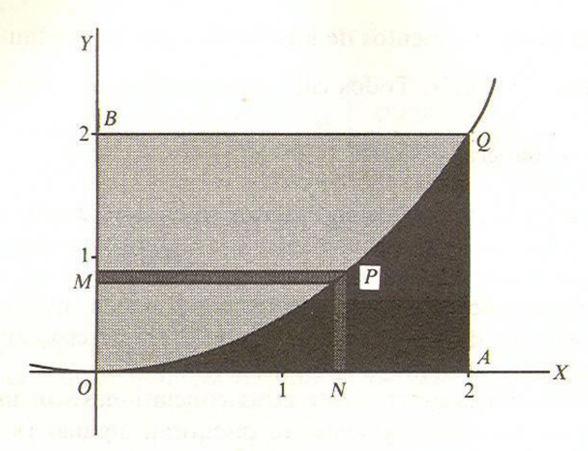


Figura 14.2

La suma de todas estas áreas viene dada por la integral definida:

$$\int_0^2 y dx$$

Pero

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

Luego

$$\text{Área} = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2 dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{4}{3} \text{ unidades de superficie}$$

2. Calcular el área comprendida entre la curva $y = 1/2(x^2)$, el eje OY y la recta $y = 2$.

La curva es la misma que en el ejemplo 1, y se muestra en la figura 14.2 con el sombreado claro; BQ es la recta $y = 2$.

Tómese un punto cualquiera $P(x, y)$ de la curva; al igual que antes, $M = y$, $ON = x$; PM representa un pequeño elemento de área.

En este problema es conveniente considerar el área formada por

el movimiento, paralelo a OX, de PM, esto es, se considera que y aumenta en δy para formar el rectángulo PM. Entonces, el área del rectángulo $PM = xdy$.

El rectángulo se hace infinitamente pequeño, y cuando $\delta y \to 0$, el elemento de área es representado por xdy. Por tanto,

$$\text{Área de la figura } OBQO = \int_{y=0}^{y=2} xdy$$

Consiguientemente, la integral tiene dos variables, y una de ellas debe expresarse en función de la otra, de manera que sólo quede una variable.

Expresemos x en función de y, en cuyo caso no se alteran los límites. Puesto que

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad ; \quad x = \sqrt{2y}$$

Sustituyendo:

$$\text{Área} = \int_0^2 \sqrt{2y}dy = \sqrt{2}\int_0^2 y^{1/2}dy = \sqrt{2}\left[\frac{2}{3}y^{3/2}\right]_0^2 = \sqrt{2} \times \frac{2}{3}(\sqrt{2})^3 =$$

$$= \frac{8}{3} \text{ unidades de superficie}$$

Si dy se hubiera expresado en función de x, y se sabe que $dy = xdx$, entonces debemos obtener para los límites los valores de x correspondientes a $y = 2$ e $y = 0$. En este caso son los mismos, ya que a partir de $y = 1/2(x^2)$, cuando $y = 2$, $x = 2$, cuando $y = 0$, $x = 0$.

Nota. Evidentemente la suma de esta área y la precedente del ejemplo 1 deben ser iguales al área del rectángulo $OBQA$, esto es:

$$\left(\frac{8}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) = 4 \text{ unidades de superficie}$$

3. Área de un círculo.

a) Área por coordenadas rectangulares

• *Ecuación de una circunferencia*

Antes de hallar el área encerrada total o parcialmente por una curva, es necesario conocer la ecuación de dicha curva.

Para ayudar a los que no han estudiado sistemas de coordenadas geométricas, vamos a hallar la ecuación de la circunferencia de un círculo en coordenadas rectangulares.

En un círculo, el centro se puede considerar como el origen de un sistema de coordenadas, siendo los ejes del sistema dos diámetros que se cortan perpendicularmente en el centro. Esto se muestra en la figura 14.3.

Tómese un punto cualquiera $P(x, y)$ de la circunferencia y trácese PM perpendicular a OX. Sea a el radio. Entonces,

$$OM = x \quad ; \quad PM = y$$

Por la propiedad de los triángulos rectángulos:

$$OM^2 + MP^2 = OP^2$$

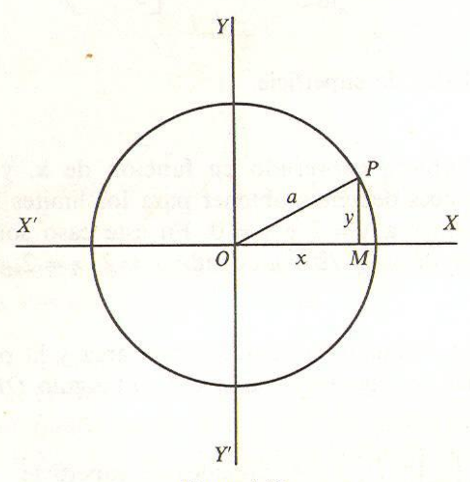


Figura 14.3.

esto es:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Esta ecuación se cumple para cualquier punto de la circunferencia y establece la relación existente entre las coordenadas de un punto cualquiera y la constante que define el círculo, esto es, el radio a.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

es la ecuación de una circunferencia de radio a y con el origen de coordenadas en su centro.

- *Área del círculo* $x^2 + y^2 = a^2$

La figura 14.4 representa este círculo.

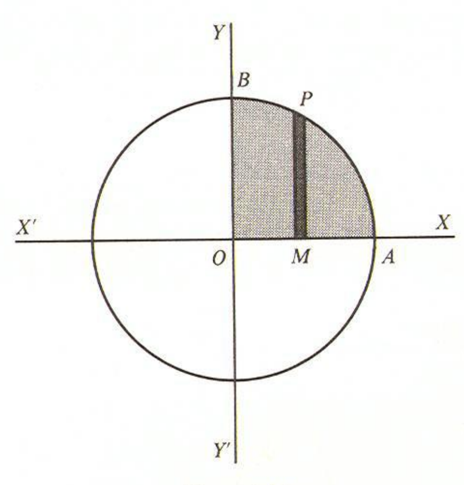


Figura 14.4.

Por razones que se aclararán posteriormente, es mejor hallar el área del cuadrante sombreado, y a partir de ella obtener el área del círculo entero.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la circunferencia. Entonces:

$$OM = x \quad ; \quad PM = y$$

El elemento de área, tal como se ha definido antes, puede representarse por el rectángulo pequeño PM, y viene dado por $y\delta x$.

En el límite, cuando $\delta x \to 0$, el elemento de área está representado por ydx.

Para la integral definida que nos da el área, los límites de x para el cuadrante son:

— En O, $x = 0$.
— En A, $x = a$.

$$\text{Área} = \int_0^a ydx$$

Puesto que

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad ; \quad y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

tendremos:

$$\text{Área} = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$$

En el apartado 11.2.1 se demostró que

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

Ahora, cuando

$$x = a, \quad \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = \operatorname{sen}^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

Cuando

$$x = 0, \quad \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} = \operatorname{sen}^{-1} 0 = 0$$

Luego:

$$\text{Área} = \left(\frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\text{Área del círculo} = \pi a^2$$

***b*) Área por un método alternativo**

El siguiente método es muy útil en la práctica.

Se puede concebir el área de un círculo como el área de una figura plana trazada por una línea recta finita que rota alrededor de uno de sus extremos y da un giro completo.

Así, en la figura 14.5 si la recta OP de longitud a unidades, desde la posición fija OA sobre el eje OX, realiza un giro completo alrededor del punto fijo O, el punto P describe una circunferencia y el área barrida por OA es el área del círculo.

Sea P un punto que rota desde OA, de tal modo que describe el ángulo θ, siendo AOP el sector circular correspondiente.

Ahora supongamos que OP sigue girando un ángulo $\delta\theta$, infinitesimalmente pequeño. El sector circular infinitesimal descrito ahora será un *elemento de área*, y la suma de todos los sectores semejantes cuando OP efectúa un giro completo, desde OX hasta volver a su posición original, será el área del círculo.

En el límite, el arco infinitamente pequeño abarcado por $\delta\theta$ se puede considerar una línea recta, y el sector infinitamente pequeño un triángulo.

La longitud del arco es $a\delta\theta$.

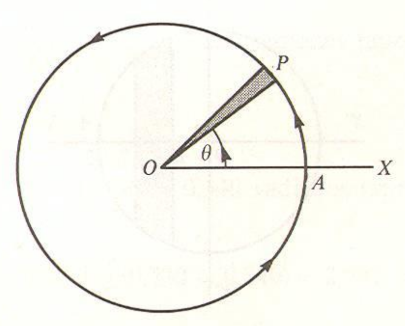


Figura 14.5

La altura del triángulo se puede considerar, en el límite, como el radio del círculo, a. Por tanto, utilizando la fórmula del área de un triángulo:

$$\text{Elemento de área} = \frac{1}{2}a\delta\theta a = \frac{1}{2}a^2\delta\theta$$

Y el ángulo correspondiente a un giro completo es 2π radianes.

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}a^2\delta\theta = \left[\frac{1}{2}a^2\theta\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}a^2 \times 2\pi =$$
$$= \pi a^2 \text{ unidades de superficie}$$

4. Área de una parte de un círculo comprendida entre dos cuerdas paralelas. En el círculo $x^2 + y^2 = 9$, hallar el área comprendida entre las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

El radio de este círculo es 3 y el centro está en el origen de coordenadas. El área buscada se muestra en la figura 14.6. Puesto que

$$x^2 + y^2 = 9 \quad ; \quad y = \sqrt{9 - x^2}$$

Si ydx representa el elemento de área,

$$ydx = \sqrt{9 - x^2}dx$$

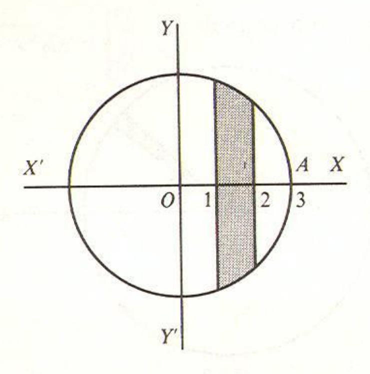


Figura 14.6

Considerando solamente la parte de área por encima de OX:

$$\text{Área} = \int_1^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx$$

Utilizando la integral:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} \qquad \text{(Ap. 11.2.)}$$

$$\int_1^2 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3}\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}2\sqrt{9 - 4} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right) -$$

$$- \left(\frac{1}{2}2\sqrt{9 - 1} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(\sqrt{5} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right) - \left(\frac{1}{2}\sqrt{8} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right) =$$

$$= (\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \frac{9}{2}\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

Ahora

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3} = 41^\circ\,48' = 0{,}730 \text{ radianes (aprox.)}$$

y

$$\operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{3} = 19^\circ\,30' = 0{,}340 \text{ radianes (aprox.)}$$

$$\text{Área} = 0{,}822 + \frac{9}{2}(0{,}730 - 0{,}340) = 2{,}582 \text{ (aprox.)}$$

$$\text{Área total} = 2{,}582 \times 2 = 5{,}164 \text{ unidades de superficie (aprox.)}$$

5. Área de un segmento circular.

Determinar el área del segmento cortado en el círculo $x^2 + y^2 = 9$ por la recta $x = 2$.

Éste es el mismo círculo del ejemplo anterior, y el área buscada es la sombreada en la figura 14.7. Considerando sólo el área de la parte por encima de OX, tenemos:

$$\text{Área} = \int_2^3 y\,dx = \int_2^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx$$

Utilizando el resultado obtenido en el ejemplo anterior:

$$\int_2^3 \sqrt{9 - x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3}\right]_2^3 =$$

$$= \left(0 + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{3}\right) - \left(\sqrt{5} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{2} - \left(2{,}236 + \frac{9}{2} \times 0{,}730\right) = \quad \text{(A partir del ejemplo anterior.)}$$

$$= \frac{9\pi}{4} - (2{,}236 + 3{,}29) = 1{,}543$$

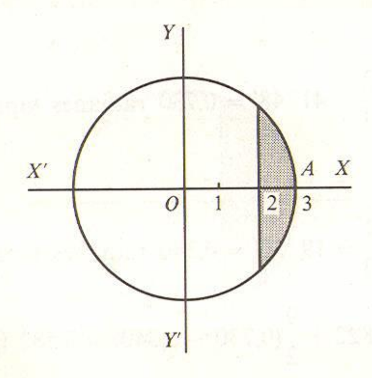


Figura 14.7

Por tanto:

Área total = 3,086 = 3,09 unidades de superficie (aproximadamente)

Nota. Como comprobación, determinar el área del segmento cortado por la recta $x = 1$. Debe ser la suma de los segmentos anteriores.

6. Área de una elipse.

La figura 14.8 representa una elipse cuyo centro es el origen de coordenadas, esto es, el punto de intersección del eje mayor AA' y del eje menor BB'.

Sea $2a$ la longitud de AA' y $2b$ la longitud de BB'. Entonces,

$$OA = a \quad \text{y} \quad OB = b$$

Se demuestra, por geometría, que la ecuación de esta elipse es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

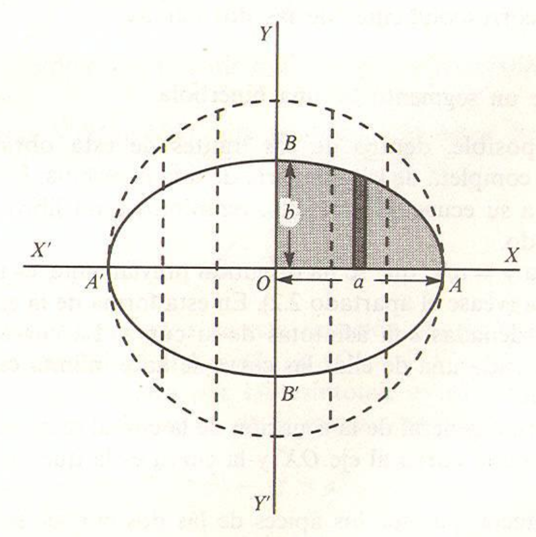


Figura 14.8

por lo que

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

El elemento de área, ydx, es $b/a\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Considerando el área de un cuadrante de la elipse como el que está sombreado en la figura 14.8, tenemos:

$$\text{Área del cuadrante} = \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

El área total será este resultado multiplicado por 4.

Comparando el resultado con el área del círculo de radio a en el ejemplo 3, se ve que la razón del área del cuadrante de la elipse a la del área correspondiente del círculo de radio a es b/a, esto es, la razón del eje menor al mayor. Ésta es también la razón de las ordenadas correspondientes de las dos curvas.

7. Área de un segmento de una hipérbola.

No es posible, dentro de los límites de esta obra, dar una explicación completa de la geometría de una hipérbola, o del método para llegar a su ecuación. Por ello, remitimos a un libro de geometría adecuado.

La curva $y = a/x$, que se ha discutido previamente, es un ejemplo de hipérbola (véase el apartado 2.2). En esta forma de la ecuación los ejes de coordenadas son asíntotas de la curva. La curva tiene dos ramas, y en cada una de ellas las curva se hace infinita cuando x se hace infinita.

En la forma general de la ecuación de la curva, se considera el eje de simetría de la curva al eje OX y la curva es la que aparece en la figura 14.9.

AA′, la recta que une los ápices de las dos curvas, se denomina *eje transverso*.

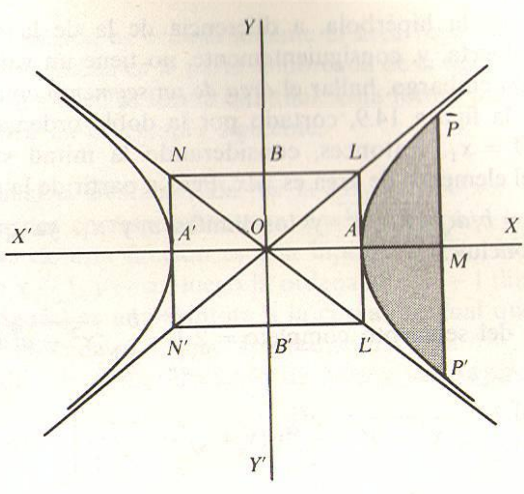


Figura 14.9

Sea $2a$ la longitud de este eje, de forma que $OA = a$. Trácense tangentes a la curva en A y A'. Sobre estas tangentes, tómese AL y $A'N$, iguales a b. Entonces, $\operatorname{tg} LOA = b/a$.

Nota. No podemos discutir aquí la relación que existe entre a y b.

Las rectas $N'OL$ y NOL' son asíntotas a la curva. Se demuestra en geometría que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Obsérvese la semejanza de esta ecuación con la de la elipse.
Si $b = a$, esto es, si $OA = AL$, $< AOL = 45°$.

Así, $< LOL'$, formado por las asíntotas, es un ángulo recto, y podemos escribir la ecuación de la curva como

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Esta forma de la curva se llama *hipérbola equilátera*.

El área de la hipérbola, a diferencia de la de la elipse y del círculo, es abierta, y, consiguientemente, no tiene un valor definido. Podemos, sin embargo, hallar el *área de un segmento* como el que se muestra en la figura 14.9, cortado por la doble ordenada PMP'.

Sea $OM = x_1$. Entonces, considerando la mitad superior del segmento, el elemento de área es ydx. Pero a partir de la ecuación de la curva $y = b/a\sqrt{x^2 - a^2}$ y los límites a y x_1, ya que $OA = a$, podemos concluir:

$$\text{Área del segmento completo} = 2\int_a^{x_1} \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}dx =$$

$$= \frac{2b}{a}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right]_a^{x_1} \quad \text{(Ap. 11.3}A.\text{)}$$

• *Ecuación de una hipérbola referida a sus asíntotas consideradas como ejes*

Esta forma se ha mencionado antes. La curva se representa en la figura 14.10. La forma general de la ecuación, por geometría, es

$$xy = c^2$$

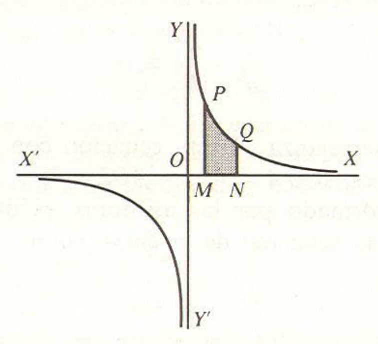


Figura 14.10

El área buscada es ordinariamente el área bajo una parte de la curva, como se indica en la parte sombreada de la figura. Esta área se puede determinar en la forma habitual. Una forma modificada es la que se explica en el ejemplo siguiente.

8. Determinar el área abarcada por la curva $y = 4/(x + 1)$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 4$.

La curva de esta función es una hipérbola (Fig. 14.11).

Cuando $x \to 1$, $y \to \infty$, luego la ordenada $x = -1$ (línea discontinua en la figura) es una asíntota a la curva, al igual que el eje OX.

El área buscada es la que aparece sombreada.

Tomando ydx como elemento de área y sustituyendo en

$$y = \frac{4}{x+1}$$

tenemos:

$$\text{Área} = \int_1^4 \frac{4}{x+1}\,dx = 4[\ln(x+1)]_1^4 =$$

$$= 4(\ln 5 - \ln 2) = 4(\ln 5/2) =$$

$$= 4(0{,}9163) =$$ (Recordando que los logaritmos naturales son hiperbólicos.)

$$= 3{,}665$$ (Aprox.)

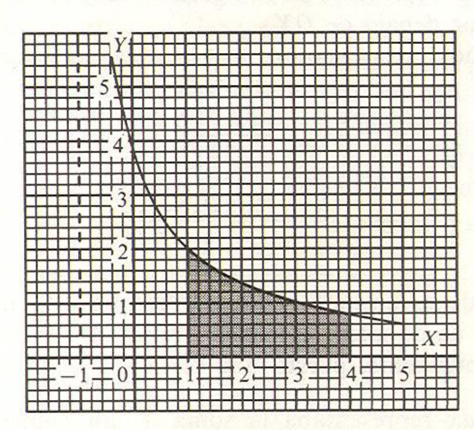


Figura 14.11

14.4. Signo de un área

Se habrá visto, en los ejemplos precedentes de determinación de áreas, que éstas se encontraban, en la mayoría de los casos, por encima en el eje OX, y que, por tanto, los valores de la función eran positivos. En los ejemplos del círculo y de la elipse, en los que las curvas eran simétricas alrededor de los dos ejes, los valores positivos aparecían al determinar el área de un cuadrante, valor que luego se multiplicaba por 4 para calcular el área total. Vamos ahora a considerar áreas que están por debajo del eje OX, y valores de la función que son negativos. Los siguientes ejemplos servirán de ilustración.

Ejemplos resueltos

1. Determinar el área comprendida por la curva $y = x^2 - 3x + 2$ y el eje OX.

Puesto que

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$$

la curva corta a OX en $x = 1$ y $x = 2$.

También $dy/dx = 2x - 3$, luego hay un punto estacionario cuando $x = 3/2$.

Puesto que $d^2y/dx^2 = 2$, y siempre es positivo, este punto es un mínimo.

La curva se representa en la figura 14.12 y el área buscada cae por entero por debajo de OX.

Supongamos que A representa esta área. Entonces:

$$A = \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = -\frac{1}{6}$$

El resultado es un área negativa. Pero un área no tiene signo. ¿Cómo, pues, ha de interpretarse este resultado? Probablemente no resultará sorprendente, puesto que se habrá visto que la integral definida $\int_a^b ydx$ representaba la suma de un número infinito de

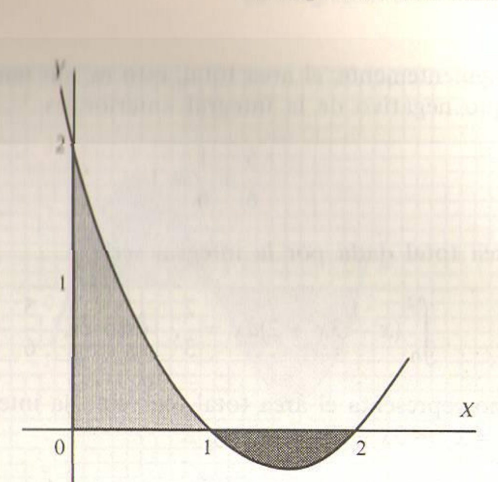


Figura 14.12

productos, todos ellos infinitamente pequeños. Cuando el área cae por debajo de OX, todos los valores de la función, esto es, de y, son negativos, y puesto que dx, que es el límite de δx y que representa un aumento, es positivo, todos los productos deben ser negativos. De aquí que la suma sea negativa. Se ha indicado (Ap. 14.2) que la suma es general para todos estos productos y que la representación de un área mediante una suma es sólo una de las aplicaciones de la integral. De ahí que si hallamos una determinada área por integración, el signo negativo no debe ser considerado. Como, por la convención de signos utilizada en la representación gráfica de una función, las ordenadas por debajo de los ejes son negativas, las áreas correspondientes son también negativas. Por ello, convencionalmente, las áreas por encima del eje OX se consideran positivas, y negativas las que se encuentran por debajo del mismo eje.

Nótese lo siguiente en relación con los ejemplos anteriores:

1. El área por debajo de la curva entre $x = 0$ y $x = 1$, esto es, el área con sombreado más claro en la figura 14.12, viene dada por

$$\int_0^1 (x^2 - 3x + 2)dx = \frac{5}{6}$$

2. Consiguientemente, el área total, esto es, sin tener en cuenta el signo negativo de la integral anterior, es

$$\frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$$

3. El área total dada por la integral sería:

$$\int_0^2 (x - 3x + 2)dx = \frac{2}{3}, \quad \text{esto es,} \quad \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

que no representa el área total real, sino la integral definida de $y = x^2 - 3x + 2$ entre 0 y 2.

2. Determinar el área abarcada por la curva $y = 4x(x - 1)(x - 2)$ y el eje OX.

La función $4x(x - 1)(x - 2)$ se hace cero cuando $x = 0$, 1 y 2. Por consiguiente, su curva corta el eje OX para estos valores de x. Procediendo como se ha indicado en el apartado 6.5, se encuentran dos puntos extremos de la manera siguiente:

1. Un valor máximo 1,55 cuando $x = 0{,}45$.
2. Un valor mínimo $-1{,}55$ cuando $x = 1{,}55$.

La parte de la curva que nos interesa se muestra en la figura 14.13. Las áreas buscadas son las sombreadas.

1. *Área de OPA*

$$\int_0^1 4x(x - 1)(x - 2)dx = \int_0^1 (4x^3 - 12x^2 + 8x)dx =$$

$$= \left[x^4 - 4x^3 + 4x^2 \right]_0^1 = (1 - 4 + 4) - 0 =$$

$$= 1 \text{ unidad de superficie}$$

2. *Área de AQB*

$$\int_1^2 4x(x - 1)(x - 2)dx = [x^4 - 4x^3 + 4x^2]_1^2 =$$

$$= -1 \text{ unidad de superficie}$$

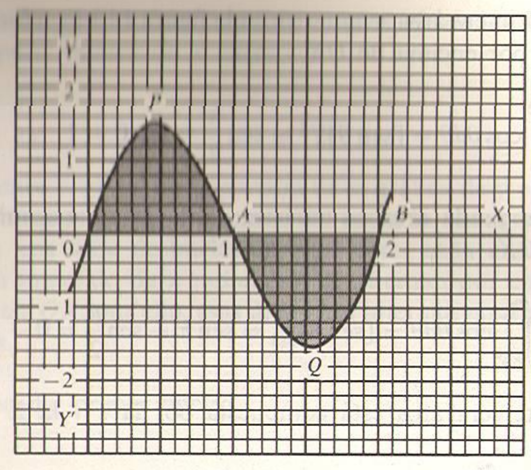


Figura 14.13

Por tanto, sin tener en cuenta el signo negativo del área inferior, el área total real de las partes sombreadas es 2 unidades de superficie.

Si integramos entre los límites 0 *y* 2, *obtenemos*:

$$\int_0^2 4x(x-1)(x-2)dx = [x^4 - 4x^3 + 4x^2]_0^2 = 16 - 32 + 16 = 0$$

Esto concuerda con la *suma algebraica* de las dos áreas determinadas por separado.

De estos ejemplos concluimos que al determinar el área total abarcada por una curva y el eje OX cuando la curva cruza el eje, debemos determinar por separado el área por encima y por debajo del eje. La suma de estas áreas, sin tener en cuenta los signos, será el área total buscada.

A continuación se dan otros ejemplos.

3. Determinar el área comprendida entre el eje OX y la curva $y = \cos x$, entre los límites:

1. 0 y $\pi/2$.
2. $\pi/2$ y π.
3. 0 y π.

1. La primera área se muestra en la figura 14.14, en forma de área sombreada por encima de OX.

$$\text{Área} = \int_0^{\pi/2} \cos\theta d\theta = [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi/2} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

2. La segunda área se muestra como la zona sombreada por debajo de OX.

$$\text{Área} = \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta d\theta = [\operatorname{sen}\theta]_{\pi/2}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$$

3. La tercera área está compuesta por la 1 y la 2.

$$\int_0^{\pi} \cos\theta d\theta = [\operatorname{sen}\theta]_0^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen} 0 = 0$$

Estos resultados concuerdan algebraicamente, pero si queremos conocer el área real entre 0 y π, debemos prescindir del signo negativo de la segunda área, y consiguientemente el área de las dos partes es 2 *unidades de superficie*.

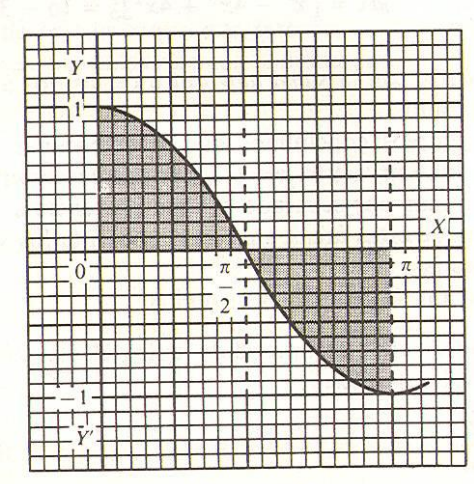


Figura 14.14

4. Determinar el área comprendida entre el eje de las x y la curva $y = \operatorname{sen} x$, para valores de x entre:

1. 0 y π.
2. π y 2π.

Es evidente, a partir de la porción de la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ de la figura 14.15, que el área comprendida entre la curva y el eje OX consiste en una serie de bucles de igual área, cada una correspondiente a un intervalo de π radianes y se alternan por encima y por debajo del eje OX; por ello, esas áreas son alternativamente positivas y negativas.

1. Área del primer bucle:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2$$

2. Área del segundo bucle:

$$\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen} x dx = [-\cos x]_{\pi}^{2\pi} = -(\cos 2\pi - \cos \pi) = -[+1-(-1)] = -2$$

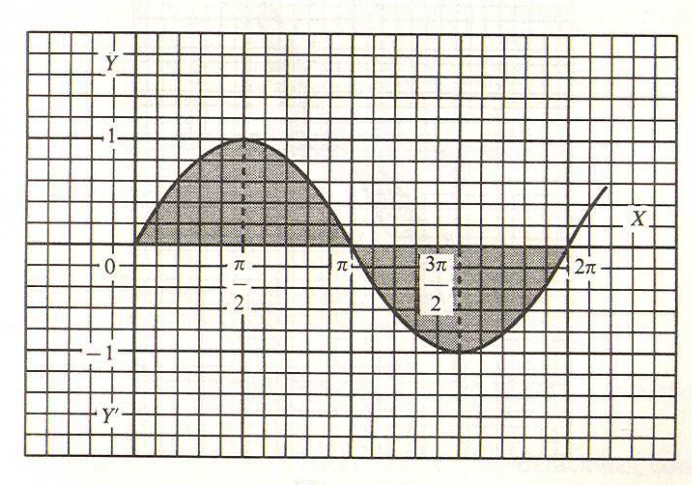


Figura 14.15

Es evidente que si hay n bucles, cuando n es impar, el área total, teniendo en cuenta los signos negativos, es 2; pero si n es par, el área calculada por este procedimiento es cero.

El área real, prescindiendo de los signos, de n bucles es $2n$.

5. Determinar el área comprendida entre la curva $y = x^3$ y la recta $y = 2x$.

La figura 14.16 representa las partes de las curvas de las funciones dadas entre sus puntos de intersección, A y A'. Las áreas sombreadas son las que se desean determinar. Por simetría es evidente que las partes por encima y por debajo del eje OX son iguales en magnitud, pero de signo contrario.

Procedemos, por tanto, a determinar el área de $OABO$ (área sombreada). Ésta es la diferencia entre: 1) el triángulo OAC, y 2) el área por debajo de la curva $y = x^3$, es decir, $OBAC$.

Hallamos, como siempre, una expresión para el elemento de área.

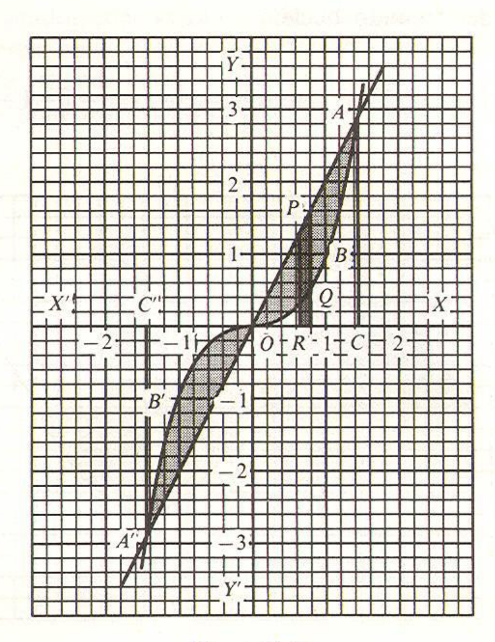


Figura 14.16

Desde un punto cualquiera P sobre la recta $y = 2x$ trazamos la ordenada PR, que corta a la curva $y = x^3$ en Q.

Como antes, constrúyase un pequeño rectángulo representado por PR. Este rectángulo representa el elemento de área para el triángulo, mientras QR representa el elemento de área para $OBAC$. Por tanto, su diferencia PQ representa el elemento de área para la parte sombreada.

Sea $PR = y_1$, $QR = y_2$. Entonces, en el límite el elemento de área representado por PR es igual a y_1dx. Y el elemento de área representado por QR es igual en el límite a y_2dx, luego en el límite el elemento de área PQ viene representado por $(y_1 - y_2)dx$. Antes de poder integrar, hay que determinar los límites de la integral. Éstos serán el valor de x en O y A, los puntos de intersección.

Para determinar el valor de x en estos puntos, resolvemos simultáneamente:

$$y = 2x$$
$$y = x^3$$

Entonces:

$$x^3 = 2x$$

y las raíces son 0, $+\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$. Éstos son los valores de x en O, A y A', respectivamente.

Para el área positiva $OABO$ los límites son

$$x = 0 \quad \text{y} \quad x = +\sqrt{2}$$

Luego el área buscada es:

$$\int_0^{\sqrt{2}} (y_1 - y_2)dx = \int_0^{\sqrt{2}} (2x - x^3)dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= (\sqrt{2})^2 - \frac{(\sqrt{2})^4}{4} = 1 \text{ unidad de superficie}$$

Por simetría, y a partir de las anteriores consideraciones, concluimos que el área por debajo del eje OX es -1 unidad de superficie.

Esto se puede comprobar de la manera siguiente:

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{0} (2x - x^3)dx = \left[x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_{-\sqrt{2}}^{0} =$$

$$= 0 - \left((\sqrt{2})^2 - \frac{(-\sqrt{2})^4}{4}\right) = 0 - 1 = -1$$

Prescindiendo del signo negativo, el área real total de los dos bucles es 2 unidades de superficie.

Como ejercicio, comprobar esto hallando el área de los dos bucles mediante el cálculo de la integral

$$\int_{-\sqrt{2}}^{+\sqrt{2}} (2x - x^3)dx$$

14.5. Coordenadas polares

Las ecuaciones de las curvas son a veces más simples y la determinación de áreas más fácil cuando se usan coordenadas polares en vez de rectangulares. Pensando en los lectores que no tienen un conocimiento previo de estas coordenadas, se presenta una breve descripción del tema. Para un tratamiento completo, consultar un libro de texto de geometría adecuado.

1. Definiciones

Sea OX (Fig. 14.17) una recta dada y O un punto dado sobre ella. Entonces, la posición de un punto cualquiera P se define por referencia a ellos cuando se conoce:

1. Su distancia a O.
2. El ángulo que forma OP con OX.

Sea r esta distancia. Sea θ el ángulo formado por OP con OX. Entonces, (r, θ) se denominan *coordenadas polares de* P.

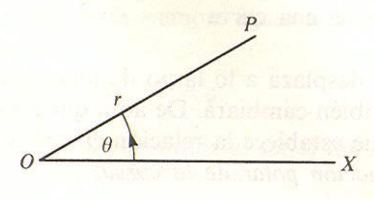


Figura 14.17.

O, el punto fijo, se llama *polo*; OP se llama *radio vector*; θ *ángulo vector*, y OX la *línea inicial*.

θ es el ángulo que describiría el radio vector al girar en una dirección positiva desde OX.

2. Relación entre las coordenadas rectangulares de un punto y las coordenadas polares

Sea P un punto (Fig. 14.18) cuyas coordenadas polares son (r, θ), y sus coordenadas rectangulares (x, y), a saber, OQ y PQ.

Entonces, es evidente que

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$

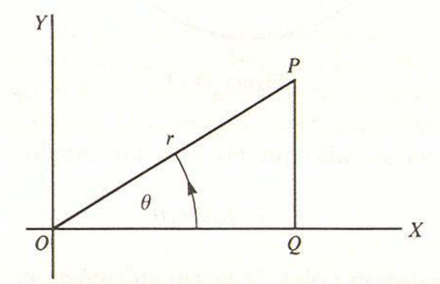


Figura 14.18.

3. Ecuación polar de una curva

Si un punto se desplaza a lo largo de una curva, al cambiar θ, r, por lo general, también cambiará. De aquí que r es una *función* de θ.

La ecuación que establece la relación entre r y θ para una curva dada se llama *ecuación polar de la curva.*

4. Ejemplo de una ecuación polar

Supongamos que un punto P se desplaza a lo largo de la circunferencia de un círculo (Fig. 14.19). Sea O un punto dado en el extremo de un diámetro fijado. Sea $2a$ el diámetro del círculo. Entonces, para una posición cualquiera de P respecto a O y OA, las coordenadas polares son:

$$OP = r$$
$$\widehat{AOP} = \theta$$

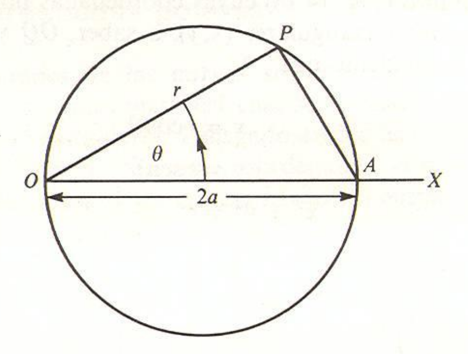


Figura 14.19.

Por geometría se sabe que $\widehat{OPA}$ es un ángulo recto, luego

$$r = 2a\cos\theta$$

Ésta es la ecuación polar de la circunferencia en las condiciones anteriores. Se puede observar que si se hubiera tomado el centro del

círculo como el polo, r sería siempre igual a a, esto es, entonces la ecuación polar quedaría

$$r = a$$

En tal caso, r sería una constante, al ser el radio del círculo, y no tendría ninguna relación formal con θ.

La ecuación de la circunferencia puede adoptar otras formas.

14.6. Representación gráfica de curvas a partir de sus ecuaciones en coordenadas polares

Muchas curvas se representan fácilmente a partir de sus ecuaciones polares, aunque la representación de los puntos puede resultar difícil cuando se utilizan las ecuaciones de las curvas en coordenadas rectangulares. El siguiente ejemplo es típico del método empleado.

Ejemplo resuelto

Representar la curva cuya ecuación polar es

$$r = a(1 + \cos\theta) = a + a\cos\theta$$

El método general consiste en elegir valores de θ, hallar los valores correspondientes de r y luego representar los puntos obtenidos.

Como se había visto anteriormente, $r = a\cos\theta$ es la ecuación de una circunferencia de diámetro a, cuando el polo está en la circunferencia. Es evidente, por tanto, que para un valor cualquiera de θ, el valor de r para la circunferencia resulta aumentado en a, con lo que se obtiene el valor de r para la curva buscada.

Trácese un círculo de radio $a/2$ (Fig. 14.20).

Tómese un punto O en el extremo de un diámetro OA. O será el polo de la curva. Puesto que $\cos\theta$ es un máximo, esto es, la unidad, cuando $\theta = 0$, el valor máximo de r para la curva se dará en el punto B, donde $AB = a$. Por tanto, el valor máximo de r es $2a$.

Cuando $\theta = \pi/2$ y $3\pi/2$, $\cos\theta = 0$, luego $r = a$. De ahí obtenemos los puntos C y D.

En el segundo cuadrante, $\cos\theta$ disminuye hasta -1 en π. Entonces, $r = a - a = 0$.

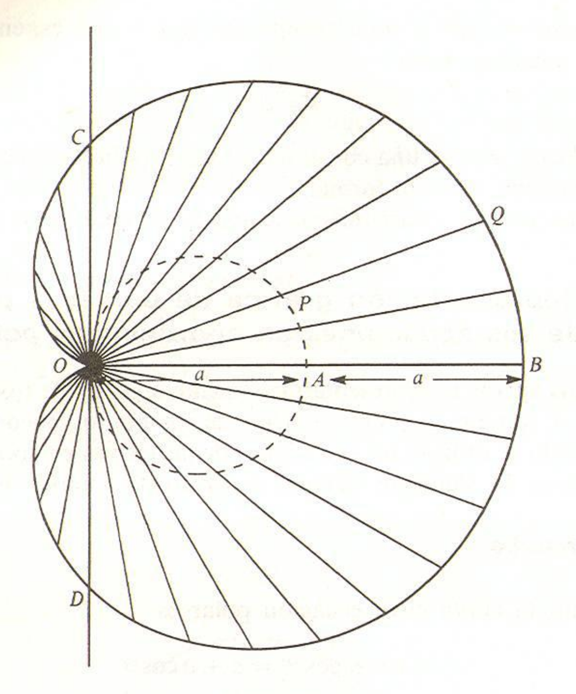


Figura 14.20.

Similarmente, se puede determinar el recorrido general de la curva para el segundo y cuarto cuadrantes. Finalmente, cuando $\theta = 2\pi$, $\cos\theta = 1$, luego la curva es cerrada en B.

Para obtener otros puntos de la curva entre los puntos especiales considerados antes, trácense una serie de cuerdas del círculo para valores crecientes de θ. Si OP es uno de estos puntos, prolónguese y hágase PQ igual a a. Entonces Q será un punto de la curva. La curva completa se muestra en la figura 14.20.

Se conoce como *cardioide* por su forma de corazón, y es de gran importancia en óptica.

Otros ejemplos de curvas que se trazan fácilmente a partir de sus ecuaciones polares son:

1. La *lemniscata*: $r^2 = a^2 \cos^2 \theta$.
2. El *caracol*: $r = b - a\cos\theta$.

3. La *espiral de Arquímedes*: $r = a\theta$.
4. La *espiral logarítmica* o *equiangular*: $\ln r = a\theta$.
5. La *espiral hiperbólica*: $r\theta = a$.

14.7. Áreas en coordenadas polares

Sea AB (Fig. 14.21) una parte de una curva de ecuación conocida en coordenadas polares.

Supongamos que se desea hallar el área de los dos sectores OAB, comprendidos entre la curva y los dos radios OA y OB, siendo los ángulos formados por esos radios con la recta fija OX:

$$\widehat{AOX} = \alpha$$
$$\widehat{BOX} = \beta$$

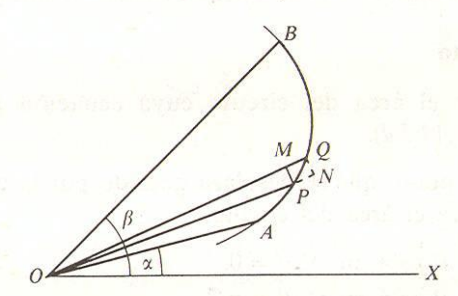


Figura 14.21.

Sea P un punto cualquiera de la curva, de coordenadas polares (r, θ). Entonces $\widehat{POX} = \theta$.

Auméntese θ en un incremento $\delta\theta$, y r, en consecuencia, auméntese en δr. Las coordenadas polares de Q, nueva posición del punto en la curva, son

$$(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$$

Entonces, a partir de la construcción que se muestra en la figura, el área del sector OPQ estará comprendida entre las áreas de los triángulos OPM y ONQ, cuyas áreas son:

$$\Delta OPM = \frac{1}{2}r^2\delta\theta \quad ; \quad \Delta ONQ = \frac{1}{2}(r + \delta r)^2\delta\theta$$

Si ahora el ángulo $\delta\theta$ disminuye infinitamente, entonces cuando

$$\delta\theta \to 0, \ (r + \delta r) \to r$$

y el área del sector infinitamente pequeño tiende a $1/2r^2 d\theta$.

Éste es, por consiguiente, el elemento de área, y la suma de todos los sectores de esta clase entre los límites $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ será el área del sector OAB.

Expresándolo en forma de integral, como en casos anteriores:

$$\text{Área del sector } OAB = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Cuando se conoce la ecuación polar de la curva, r se puede expresar en función de θ y se puede calcular la integral.

Ejemplo resuelto

Determinar el área del círculo cuya ecuación polar es $r = 2a\cos\theta$ (Ap. 14.5.*d*).

Si P es un punto que se desplaza girando por la curva, el radio vector describirá el área del círculo.

— Cuando P está en A, $\theta = 0$.
— Cuando P está en O, $\theta = \pi/2$.

Por tanto, cuando P se desplaza desde A hasta O y el ángulo vector cambia de 0 a $\pi/2$, el área descrita será un semicírculo.

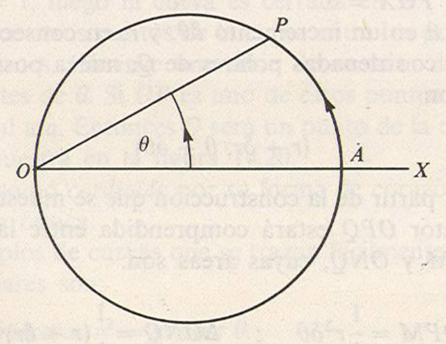


Figura 14.22.

Utilizando la fórmula obtenida anteriormente:

$$\text{Área de un semicírculo} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

El área del círculo será el doble de esta área:

$$\text{Área del círculo} = \int_0^{\pi/2} r^2 d\theta$$

Pero $r = 2a\cos\theta$, luego

$$\text{Área} = \int_0^{\pi/2} 4a^2 \cos^2\theta d\theta = 4a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta =$$

$$= 4a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta) d\theta = 2a^2 \left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\pi/2} = \text{(Ap. 11.1.)}$$

$$= 2a^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) = 2a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$$

14.8. Valor medio

Sea PQ (Fig. 14.23) una parte de la curva de una función continua $y = f(x)$. Sean PA y QB las ordenadas en P y Q, siendo $OA = a$ y $OB = b$. Entonces, por lo que llevamos dicho, sabemos que

$$\text{Área de } APQB = \int_a^b f(x)dx$$

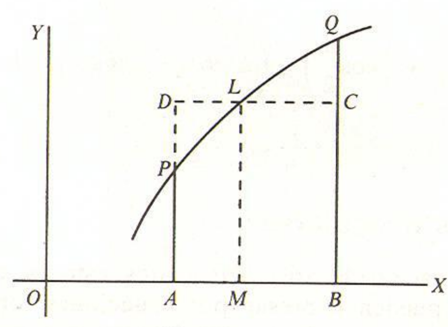


Figura 14.23.

Sea $ABCD$ un rectángulo cuya área es igual a la de $APQB$, esto es, $\int_a^b f(x)dx$.

Trácese LM paralela a OY desde L, punto de corte sobre la curva, y DC paralela a OX.

$$ABCD = AB \cdot LM$$

$$LM = \frac{\text{Área de } ABCD}{AB} = \frac{\text{Área de } APQB}{AB} = = \frac{\int_a^b f(x)dx}{AB} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Se dice que LM es el valor medio de las ordenadas de la curva para el intervalo de valores de $x = a$ a $x = b$. Luego el valor medio de $f(x)$ desde a hasta b es

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

Ejemplo resuelto

Determinar el valor medio de $2\cos t - \operatorname{sen} 3t$ entre los valores $t = 0$ y $t = \pi/6$.

A partir de lo anterior, el valor medio será:

$$\frac{\int_0^{\pi/6} (2\cos t - \operatorname{sen} 3t)dt}{\frac{\pi}{6} - 0} = \frac{\left[2\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\cos 3t\right]_0^{\pi/6}}{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{\left(2\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{2}\right) - \left(2\operatorname{sen} 0 + \frac{1}{3}\cos 0\right)}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{\pi}$$

14.9. Áreas irregulares

La determinación de áreas irregulares, esto es, de áreas cuyos límites no se pueden expresar por ecuaciones formales, es con frecuencia una cuestión de enorme importancia práctica. Existen

ciertos métodos empíricos, como el uso de papel milimetrado y cuadrículas, que dan resultados aproximados; pero también existen métodos de cálculo mediante los cuales estas áreas se pueden determinar con mayor precisión, aunque aún de manera aproximada. El primero de estos métodos es la *regla del trapecio*, que vemos a continuación.

14.10. La regla del trapecio

Sea el área que se quiere determinar la comprendida por la curva irregular PV (Fig. 14.24), el eje OX y las ordenadas PA y VG. Divídase AG en un número cualquiera de partes iguales en B, C, D, ... de longitud l, y trácense las ordenadas correspondientes PA, QB, RC, ...

Únanse PQ, QR, RS, ..., UV. Sean y_1, y_2, y_3, ... las longitudes de las ordenadas.

Entonces, cada una de las figuras resultantes de esa construcción, como por ejemplo $APQB$, es un trapecio, siendo sus áreas

$$\frac{1}{2}l(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}l(y_2 + y_3) + \cdots + \frac{1}{2}l(y_6 + y_7)$$

Las áreas de los trapecios tienden a las áreas de aquellas figuras en las que la recta PQ se sustituye por la curva PQ, y así en todos

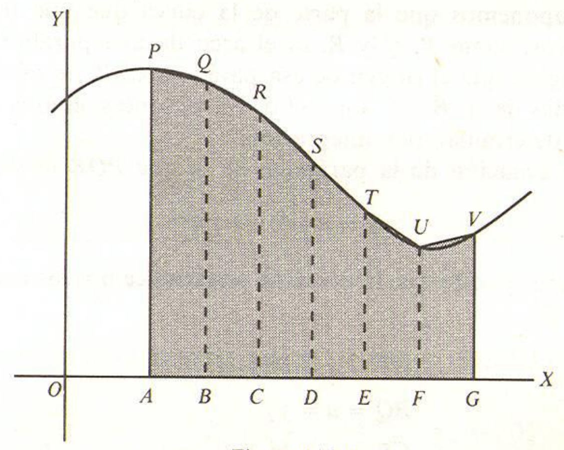


Figura 14.24

los otros trapecios. Consiguientemente, la suma de todos estos trapecios tiende al área de toda la figura que se desea determinar, y cuanto mayor sea el número de trapecios, más cercano estará el valor de la suma al valor real. Por tanto, el área es aproximadamente igual a

$$\frac{1}{2}l[(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + (y_3 + y_4) + \cdots + (y_6 + y_7)] =$$

$$= \frac{1}{2}l_2[(y_1 + y_7) + 2(y_2 + y_3 + y_4 + \cdots + y_6)] =$$

= (Semidistancia entre las franjas) × [(Suma de la primera y última ordenada) + (Doble de la suma de las otras ordenadas)]

(Véase también el Ap. 22.1.)

14.11. Regla de Simpson para las áreas

Considerando la curva irregular del apartado anterior, es evidente que si las cuerdas PQ, QR, RS, ... se sustituyeran por arcos de curvas regulares convenientes, y se determinaran por otros métodos previamente dados las áreas de las figuras obtenidas, la aproximación al área total sería mayor que la que hemos hallado por la regla del trapecio.

Así, suponemos que la parte de la curva que une tres puntos consecutivos, como P, Q y R, es el arco de una parábola.

Supóngase que el origen de esa parábola es B, de modo que las coordenadas de A, B y C son $-l$ o $+l$. Entonces, el área de $APRC$ se puede determinar por integración.

Sea la ecuación de la parábola, de la que PQR es un arco,

$$y = a + bx + cx^2$$

Entonces, puesto que la ecuación se satisface por las coordenadas de A, B, C:

$$AP = a - bl + cl^2 = y_1 \quad (1)$$

$$BQ = a = y_2 \quad (2)$$

$$CR = a + bl + cl^2 = y_3 \quad (3)$$

Luego

$$y_2 = a$$

Sumando (1) y (3):

$$y_1 + y_3 = 2(a + cl^2)$$

De donde

$$2cl^2 = y_1 + y_3 - 2a = y_1 + y_3 - 2y_2 \quad \text{[A partir de (2).]}$$

Por tanto,

$$cl^2 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3 - 2y_2)$$

Integrando el área de $APRC$:

$$\int_{-l}^{l} (a + bx + cx^2)dx = \left[ax + \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{3}cx^3\right]_{-l}^{l} = 2al + \frac{2}{3}cl^3 =$$

$$= 2l\left(a + \frac{1}{3}cl^2\right) = 2l\left[y_2 + \frac{1}{6}(y_1 + y_3 - 2y_2)\right] =$$

$$= 2l\left(\frac{4y_2 + y_1 + y_3}{6}\right) = l\left(\frac{y_1 + 4y_2 + y_3}{3}\right)$$

Similarmente, el área de $RCET$ será:

$$l\left(\frac{y_3 + 4y_4 + y_5}{3}\right)$$

y el área de $TEGV$:

$$l\left(\frac{y_5 + 4y_6 + y_7}{3}\right)$$

Por tanto, el área del conjunto será:

$$\frac{l}{3}[(y_1 + 4y_2 + y_3) + (y_3 + 4y_4 + y_5) + (y_5 + 4y_6 + y_7)] =$$

$$= \frac{l}{3}[(y_1 + y_7) + 2(y_3 + y_5) + 4(y_2 + y_4 + y_6)]$$

Claramente, este proceso se puede aplicar a un número *par* cualquiera de intervalos que contenga un número *impar* de ordenadas.

Por tanto, si hay $2n$ intervalos, habrá $2n + 1$ ordenadas.

A partir de estas consideraciones podemos deducir:

Regla de Simpson para áreas

Si el área se divide en un número par de franjas por ordenadas equidistantes, entonces

$$\text{Área} = \frac{(\text{Anchura de la franja})}{3}\left[(\text{Suma de la primera y última ordenada}) + 2(\text{Suma de las otras ordenadas impares}) + 4(\text{Suma de las ordenadas pares})\right]$$

Se comprende fácilmente que cuanto mayor sea el número de franjas que se tomen, tanto más aproximado será el cálculo del área. (Véase también el Ap. 22.2.)

Ejemplo resuelto

Determinar el área de un cuadrante de un círculo de 2 cm de radio.

En este ejemplo, el resultado obtenido mediante la regla de Simpson se puede comparar con el área calculada del cuadrante. La figura 14.25 representa el cuadrante.

Divídase el radio OA en 10 divisiones iguales de 2 mm cada una. Entonces, las ordenadas se representarán por $y_1, y_2, y_3, ..., y_{11}$.

Tras medir estas ordenadas, los datos se disponen de la siguiente forma:

Primera y última ordenada	Otras ordenadas impares	Ordenadas pares
$y_1 = 2$	$y_3 = 1{,}96$	$y_2 = 1{,}99$
$y_{11} = 0$	$y_5 = 1{,}83$	$y_4 = 1{,}91$
Suma = 2	$y_7 = 1{,}6$	$y_6 = 1{,}73$
	$y_9 = 1{,}2$	$y_8 = 1{,}42$
	Suma = 6,59	$y_{10} = 0{,}86$
		Suma = 7,91

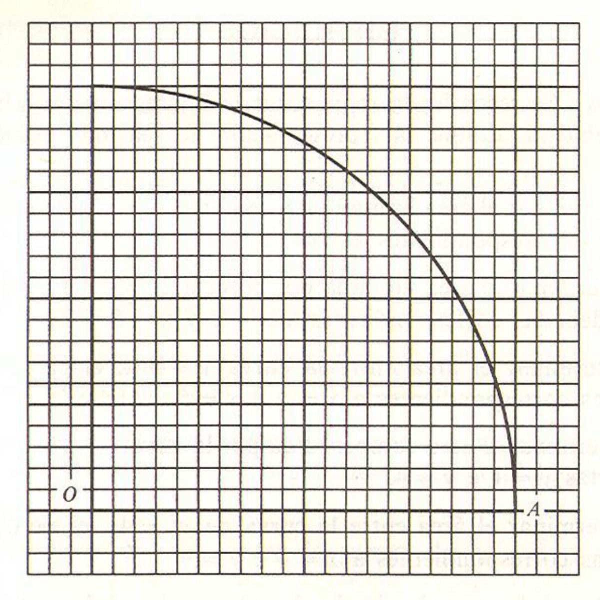


Figura 14.25.

Por la regla de Simpson:

$$\text{Área} = \frac{0{,}2}{3}\,[2 + (2 \times 6{,}59) + (4 \times 7{,}91)] =$$

$$= \frac{0{,}2}{3} \times 46{,}82 = 3{,}12 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área calculada} = \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \pi \times 4 = 3{,}14 \text{ cm}^2$$

El error 0,2 en 3,14 es menor que el 1 por 100.

EJERCICIOS

[*Nota.* Se recomienda representar la figura correspondiente de cada problema, aunque la representación no sea muy exacta.]

1. Determinar el área limitada por la curva $y = x^3$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$.

2. Determinar el área limitada por la recta $2y = 5x + 7$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 2$ y $x = 5$.

3. Determinar el área entre la curva $y = \ln x$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 5$.

4. Determinar el área comprendida por la curva $y = 4x^2$, el eje OY y las rectas $y = 1$ e $y = 4$.

5. Determinar el área entre la curva de $y^2 = 4x$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 4$ e $y = 9$.

6. Determinar por el método de integración el área del círculo $x^2 + y^2 = 4$.

7. En el círculo $x^2 + y^2 = 16$, determinar el área incluida entre las cuerdas paralelas cuyas distancias perpendiculares desde el centro son 2 y 3 unidades. Determinar también el área del segmento cortado en el círculo $x^2 + y^2 = 16$ por la cuerda que dista del centro 3 unidades.

8. Determinar por integración el área de la elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

9. Determinar el área del segmento cortado en la hipérbola $x^2/9 - y^2/4 = 1$ por la cuerda $x = 4$.

10. Determinar el área entre la hipérbola $xy = 4$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 2$ y $x = 4$.

11. Determinar el área entre la curva de $y = 2x - 3x^2$ y el eje OX.

12. Determinar el área limitada por $y = e^x$ y el eje OX entre las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 3$.

13. Determinar el área cortada por el eje OX en la curva de $y = x^2 - x - 2$.

14. Determinar el área total incluida entre la curva de $y^2 = x^3$ y la recta $x = 4$.

15. Determinar el área del segmento cortado en la curva de $xy = 2$ por la recta $x + y = 3$.

16. Determinar el área total del segmento comprendido entre el eje OX y la curva de $y = x(x - 3)(x + 2)$.

17. Determinar el área entre las curvas de $y = 8x^2$ e $y = x^3$.

18. Determinar el área común a las dos curvas $y = x^2$ e $y^2 = x$

19. Determinar el área entre la catenaria $y = \mathrm{Ch}\, x/2$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 0$ y $x = 2$.

20. Determinar el área comprendida entre la curva de $y = x^2 - 8x + 12$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = 1$ y $x = 9$.

21. Determinar el área entre la curva de $y = x^3$ y la recta $y = x/4$.

22. Determinar el área de la cardioide de ecuación $r = a(1 + \cos\theta)$, siendo los límites de θ, 2π y 0.

23. Determinar el área de un bucle de la curva $r = a \operatorname{sen} 2\theta$, esto es, entre los límites 0 y $\pi/2$. ¿Cuántos bucles habrá entre 0 y 2π? [*Nota.* $a \operatorname{sen} 2\theta$ se hace cero cuando $\theta = 0$ y $\theta = \pi/2$. Como la función es continua entre estos valores, la curva deberá formar un bucle entre ellos. Trazar aproximadamente la curva completa.]

24. Determinar el área de un bucle de la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\theta$. ¿Cuántos bucles hay en la curva completa?

25. Si el radio vector de la función $r = a\theta$ da una vuelta desde 0 a 2π, determinar el área barrida por dicho radio.

26. Determinar el área descrita por la curva $r = a \sec^2 \theta/2$ desde $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$.

27. Determinar el área comprendida por la curva $r = 3\cos\theta + 5$ entre $\theta = 2\pi$ y $\theta = 0$.

28. Determinar el valor medio de la función $\operatorname{sen} x$ en el intervalo de valores de $x = 0$ hasta $x = \pi$.

29. Determinar el valor medio de la función $\operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo de valores de $x = 0$ hasta $x = \pi$.

30. Determinar el valor medio de $y = 1/x$ para el intervalo de valores de $x = 1$ hasta $x = 10$.

31. Determinar el valor medio de $y^2 = 4x$ entre $x = 4$ y $x = 0$.

32. La ecuación de una curva es $y = b \operatorname{sen}^2 \pi x/a$. Determinar la altura media de la porción para la que x está entre b y a.

33. Determinar el valor medio de $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = \pi/4$.

34. Determinar el valor medio de la función $y = a \operatorname{sen} bx$ entre los valores de $x = 0$ y $x = \pi/b$.

35. El alcance de un proyectil disparado con una velocidad inicial v_0 y una elevación θ es $v_0^2/g \operatorname{sen} 2\theta$. Determinar el alcance medio cuando θ varía de 0 a $\pi/2$.

36. Las longitudes de nueve ordenadas equidistantes de una curva son 8, 10,5, 12,3, 11,6, 12,9, 13,8, 10,2, 8 y 6 m, respectivamente, y la longitud de la base es 24 m. Hallar el área entre la curva y la base.

37. Se divide un área en diez partes iguales por ordenadas paralelas, separadas 0,2 m, tocando la primera y la última la curva limitante. Las longitudes de las ordenadas son 0, 1,24, 2,37, 4,10, 5,28, 4.76, 4,60, 4,36, 2,45, 1,62 y 0. Hallar el área.

38. Las longitudes de las ordenadas de una curva, en milímetros, son 2,3, 3,8, 4,4, 6,0, 7,1, 8,3, 8,2, 7,9, 6,2, 5,0 y 3,9. Hallar el área comprendida por la curva si cada una de las ordenadas están separadas 1 mm.

39. Las ordenadas a una distancia igual de 10 m tienen, en metros, las longitudes de 6,5, 9, 13, 18,5, 22, 18,5 y 14,5. Hallar el área limitada por la curva, el eje OX y las ordenadas extremas.

40. Hallar el área comprendida por la curva que se muestra en la figura 14.26, trazándose las ordenadas en los puntos marcados del 1 al 12, si cada división representa 1 m.

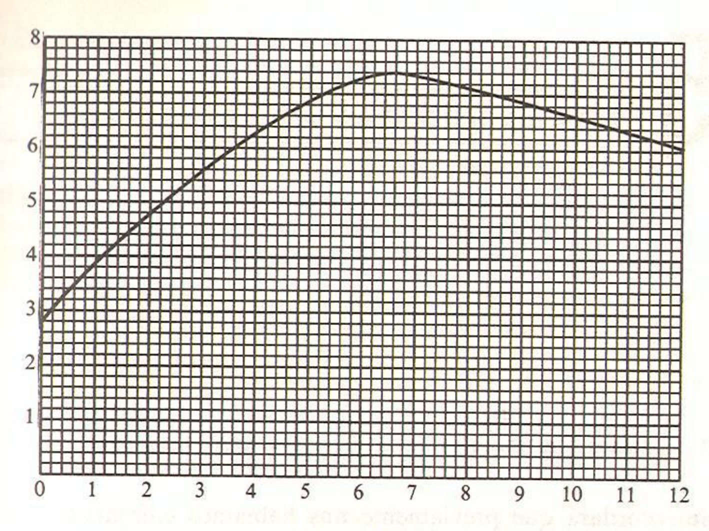


Figura 14.26.

15 Las longitudes de las curvas

15.1. Medida de la longitud de una curva

Se recordará que previamente nos habíamos enfrentado con el problema de la longitud de una curva cuando considerábamos la «medida circular» de un ángulo. La unidad empleada en este método de medida de ángulos es el *radián*, que es *el ángulo subtendido en el centro de un círculo por un arco de longitud igual al radio.* La dificultad de comparar la longitud de una curva con la de una línea recta queda resuelta suponiendo que el arco de un semicírculo subtiende π radianes, siendo π una constante cuyo valor no hay modo de determinar si no es mediante métodos prácticos aproximados. Se sabe que este valor es aproximadamente 3,14159... Utilizando esta constante se establece que el semicírculo contiene πr unidades de longitud, siendo r el radio, y que la longitud de la circunferencia del círculo es $2\pi r$ unidades.

Obsérvese que esta «fórmula» para la circunferencia es, meramente, una afirmación de que la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro viene dada por la letra griega π, donde el valor de π es algo indeterminado. La determinación de su valor mantuvo ocupados a los matemáticos durante siglos, y mediante diversos e ingeniosos procedimientos, que no son objeto del presente libro, se encontraron distintas aproximaciones.

La matemática actual, sin embargo, ha resuelto el problema con la ayuda del cálculo, como veremos enseguida, y ahora se puede demostrar que esa razón es inconmensurable, aunque su valor se puede calcular con certeza hasta el grado de exactitud que se quiera.

De la misma manera que ninguna parte de ninguna curva, por pequeña que sea, se puede superponer a ninguna parte de una recta, de modo que coincida con ella, tampoco se puede determinar la longitud de la curva por comparación con una recta de longitud conocida. La integración, sin embargo, suministra un método para determinar la longitud de una curva *regular* cualquiera. Este método, como posiblemente se habrá ya supuesto, es similar al ya usado para las áreas. Se halla una expresión para «un elemento de longitud» de la curva y la suma de todos esos elementos se obtiene por integración. Este proceso se denomina *rectificación de una curva.*

15.2. Fórmula general para la longitud de una curva en coordenadas cartesianas

Sea AB (Fig, 15.1) una porción de la curva de una función $y = f(x)$ entre los puntos A, donde $x = a$, y B, donde $x = b$.

Sean P y Q dos puntos de la curva, y PQ la cuerda de la curva que une dichos puntos. Sea $P(x, y)$ y s la longitud del arco que va de A a B. Cuando

$$x \text{ aumenta en } \delta x$$
$$y \text{ aumenta en } \delta y$$

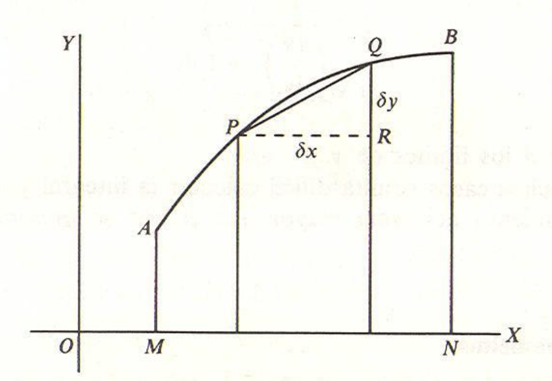


Figura 15.1.

y entonces

$$s \text{ aumenta en } \delta s$$

Esto es, δs representa la longitud del arco PQ. Entonces, por geometría, la cuerda $PQ = \sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}$.

Si tomamos Q cercano a P, esto es, si δx se hace pequeño, la longitud de la cuerda es prácticamente igual a la longitud del arco.

Si Q es infinitamente cercano a P, en el límite cuando $\delta x \to 0$, la cuerda tenderá a coincidir con la curva y la suma de estas cuerdas será igual a la longitud del arco. Entonces:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \left[\text{o } \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy\right]$$

Integrando:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Si la integración resulta más conveniente hacerla respecto a valores de y, entonces:

$$\int_d^c \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1}\, dy$$

siendo c y d los límites de y.

En muchos casos resulta difícil calcular la integral y se requiere un conocimiento del tema mayor que el que se presenta en este volumen.

Ejemplos resueltos

1. Determinar la longitud de la circunferencia del círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

Puesto que

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} = (a^2 - x^2)^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2 - x^2}$$

Considerando el área de un cuadrante, los límites serán a y 0. Utilizando la fórmula anterior, esto es:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Entonces:

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\, dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\, dx = a \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a \times \left[\operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}\right]_0^a = a \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi a}{2}$$

Luego la circunferencia del círculo es

$$4 \times \frac{\pi a}{2} = 2\pi a$$

Nota. Es necesario utilizar π para el cálculo de la integral definida, y se emplea aquí de la misma manera que se indicó en el apartado 15.1.

2. Hallar la longitud del arco de la parábola $x^2 = 4y$ desde el vértice hasta el punto en el que $x = 2$.

Se puede escribir la ecuación así:

$$y = \frac{x^2}{4}$$

De donde

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2}$$

En la figura 15.2 se muestra una representación de la curva, donde OQ representa la parte de la curva cuya longitud se busca. Los límites de x son, claramente, 0 y 2.

Utilizando

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

y sustituyendo, obtenemos:

$$s = \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{x^2}{4}}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{x^2 + 4}\, dx$$

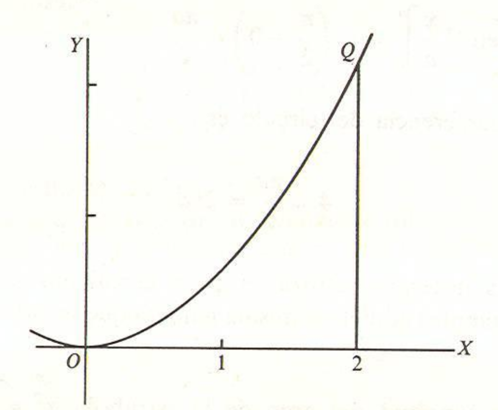


Figura 15.2.

Luego, por la fórmula del apartado 11.2.1:

$$s = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+4} + \frac{4}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right]_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2} \times 2\sqrt{8} + 2[\ln(2+\sqrt{8}) - \ln 2]\right\} =$$

$$= \sqrt{2} + \ln\frac{2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) \simeq 2{,}295$$

15.3. Ecuación para la longitud de una curva en coordenadas polares

El método general es similar al dado para coordenadas rectangulares. En la figura 15.3, sea AB una parte de una curva de ecuación polar conocida.

Sean θ_1 y θ_2 los ángulos formados con OX por OA y OB, respectivamente, sea s la longitud de AB, P un punto cualquiera (r, θ) de la curva, Q un punto de la curva cercano a P, tal que $\widehat{QOM}$, el incremento de θ, $\delta\theta$ y PM el incremento de r, esto es, δr. De donde Q resulta ser el punto $(r + \delta r, \theta + \delta\theta)$. Sea PQ la cuerda que une P y Q. Entonces, $QM = r\delta\theta$ y el arco PQ se representa por δs.

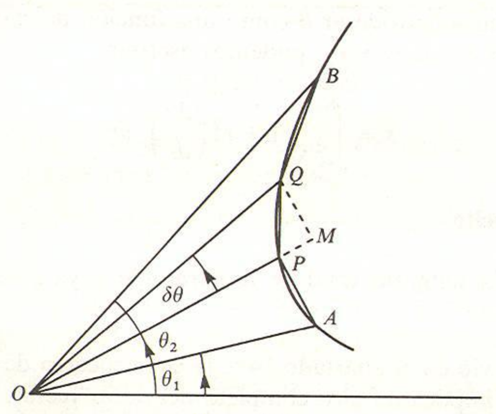


Figura 15.3.

Con la construcción indicada:

$$PM = \delta r$$

Entonces:

$$PQ^2 = (r\delta\theta)^2 + (\delta r)^2$$

Cuando Q se toma infinitamente cercano a P, esto es, cuando $\delta\theta \to 0$, en el límite

$$(ds)^2 = (rd\theta)^2 + (dr)^2$$

$$ds = \sqrt{r^2(d\theta)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta \qquad (1)$$

Los límites de la integral son θ_1 y θ_2.

Integrando:

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

También podemos pomer (1) en la forma

$$ds = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr$$

esto es, podemos considerar θ como una función de r; de ahí que si los límites de r son r_1 y r_2, podemos escribir:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr \qquad (3)$$

Ejemplo resuelto

Determinar la longitud total de la cardioide cuya ecuación es $r = a(1 - \cos\theta)$.

Como se vio en el apartado 14.6, la construcción de una cardioide completa implica un giro completo del radio vector, de tal forma que θ aumente de 0 a 2π.

Puesto que

$$r = a(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{dr}{d\theta} = a \operatorname{sen}\theta$$

Utilizando la fórmula (2) anterior:

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{[a(1 - \cos\theta)]^2 + (a \operatorname{sen}\theta)^2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{[a^2(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) + a^2 \operatorname{sen}^2\theta]}\, d\theta =$$

$$= a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos\theta}\, d\theta = a\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{2}}\, d\theta =$$

$$= 2a \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta = 2a\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 4a(-\cos\pi + \cos 0) = 8a$$

EJERCICIOS

1. Determinar la longitud del arco de la parábola $y = 1/2x^2$ entre el origen y la ordenada correspondiente a $x = 2$.

2. Determinar la longitud del arco de la parábola $y^2 = 4x$ desde $x = 0$ a $x = 4$.

3. Determinar la longitud del arco de la curva $y^2 = x^3$ desde $x = 0$ a $x = 5$.

4. Determinar la longitud del arco de la catenaria $y = \operatorname{Ch} x$ desde el vértice hasta el punto $x = 1$.

5. Determinar la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ entre los puntos $x = 1$ y $x = 2$ (para la integral, véase ejercicio 79, cap. 12).

6. Determinar la longitud de la parte de la curva $y + \ln \sec x$ entre los valores $x = 0$ y $x = \pi/4$.

7. Determinar la longitud de la circunferencia del círculo de ecuación $r + 2a \cos \theta$.

8. Determinar la longitud del arco de la espiral de Arquímedes $r = a\theta$, entre los puntos $\theta = r$ y $\theta = \pi$. (Trácese la curva correspondiente.)

9. Determinar la longitud de la curva de la espiral hiperbólica $r\theta = a$ desde $\theta = 1/2$ a $\theta = 1$. (Para la integral, véase ejercicio 81, capítulo 12.)

10. Determinar la longitud total de la curva de $r = a \operatorname{sen}^3 \theta/3$.

16 Sólidos de revolución. Volúmenes y áreas de superficies

16.1. Sólidos de revolución

Los métodos de integración que nos han permitido hallar áreas de figuras planas se pueden extender a la determinación de volúmenes de sólidos regulares.

Los sólidos de los que principalmente nos vamos a ocupar son los que se forman en el espacio cuando una curva o área regular gira alrededor de un eje. Se llaman *sólidos de revolución*. Por ejemplo, si un semicírculo gira alrededor de su diámetro engendrará una esfera. De igual modo, un rectángulo que gira alrededor de un lado engendrará un cilindro, en una rotación completa.

16.2. Volumen de un cono

El método empleado para determinar volúmenes de sólidos de revolución se puede ilustrar con el ejemplo de un cono. Si un triángulo gira completamente alrededor de uno de los catetos tomado como eje, el sólido engendrado es un *cono*.

O, si una recta, de ecuación $y = mx$, gira alrededor del eje OX (o OY), de modo que forme un ángulo constante con el eje, engendrará un cono. Como la recta pasa por el origen y tiene una longitud indeterminada:

1. El volumen será indeterminado.
2. El sólido completo será un doble cono, siendo el origen un vértice común.

Por su parte, si un cono es cortado por un plano paralelo al eje OX, la sección resultante será un hipérbola. Ésta es la razón de que dicha curva, como se apuntó en el ejemplo 7 del apartado 14.3, tenga dos ramas simétricas.

El volumen es definido si una ordenada desde un punto de $y = mx$ es girada hasta abarcar una porción definida del cono. Vamos a determinar el volumen de dicho cono.

En la figura 16.1 sea OA la recta $y = mx$, y A un punto cualquiera de la recta.

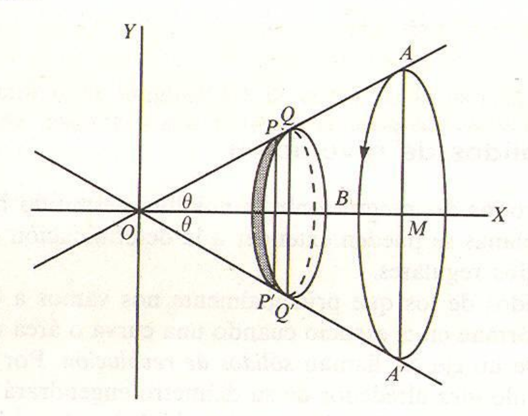


Figura 16.1

Sea θ un ángulo formado por la recta con OX.

$$\operatorname{tg}\theta = m$$

Giremos OA alrededor de OX de modo que el ángulo formado con OX se mantenga siempre θ.

Será OA' la posición de OA después de una semirrotación completa. Entonces A, y cualquier otro punto de OA después de un giro completo, describirán un círculo y se habrá engendrado un cono de revolución con vértice en O.

Sea AMA' la doble ordenada que une A con A'. También es el diámetro del círculo formado por la rotación de A, a saber ABA'.

Sea V el volumen del cono de vértice O y base el círculo ABA'. OM representa la altura del cono, a la que llamamos h.

Sea P un punto cualquiera de A de coordenadas (x, y).

Aumentemos x en δx de modo que el punto Q correspondiente en OA tiene ahora las coordenadas $(x + \delta x,\ y + \delta y)$.

PQ, al rotar, describe una pequeña rodaja del cono, siendo las caras de la rodaja los círculos descritos por los puntos P y Q. El grosor de la rodaja es δx.

Su volumen está entre los cilindros cuyos volúmenes son

$$\pi y^2 \delta x \quad \text{y} \quad \pi(y + \delta y)^2 \delta x$$

Supongamos que Q se acerca infinitamente a P, de modo que δx se hace infinitamente pequeño y en el límite se representa por dx.

Por tanto, cuando $\delta x \to 0$ el volumen de la rodaja $\to \pi y^2 dx$. $\pi y^2 dx$ es, por consiguiente, el elemento de volumen.

El volumen del cono es la suma de todos los elementos de volumen entre los valores $x = 0$ y $x = h$.

$$V = \int_0^h \pi y^2 dx = \pi \int_0^h (mx)^2 dx = \pi m^2 \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{1}{3}\pi m^2 h^3$$

Pero

$$m = \operatorname{tg}\theta = \frac{AM}{h}$$

Luego

$$V = \frac{1}{3}\pi \frac{AM^2}{h^2} h^3 = \frac{1}{3}\pi AM^2 h$$

o, si $AM = y_1$, el radio de la base,

$$V = \frac{1}{3}\pi y_1^2 h$$

o volumen del cono = 1/3(área de la base × altura).

16.3. Fórmula general para volúmenes de sólidos de revolución

1. Rotación alrededor del eje OX

Sea AB (Fig. 16.2) una parte de la curva de ecuación $y = f(x)$.

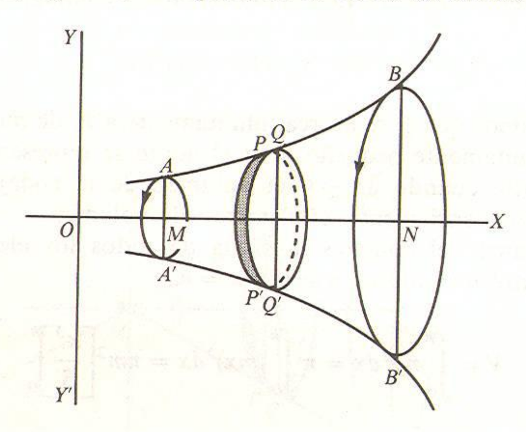


Figura 16.2

Hagamos que AB gire alrededor de OX, engendrando un sólido como el que se representa en la figura.

Sean AMA' y BNB' las coordenadas dobles de A y B, de modo que $OM = a$ y $ON = b$, y sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva.

Aumentemos x en δx, de modo que Q, el punto correspondiente de la curva, sea $(x + \delta x, y + \delta y)$.

Entonces, el volumen del trozo engendrado por PQ al girar está comprendido entre $\pi y^2 dx$ y $\pi(y + \delta y)^2 \delta x$.

En el límite, cuando Q está infinitamente cerca de P, cuando $\delta x \to 0$ y $\delta y \to 0$, el volumen $\to \pi y^2 dx$.

El volumen del sólido completo es la suma de todos los trozos entre los límites $x = a$ y $x = b$. Sea V este volumen:

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx \qquad (1)$$

Como $y = f(x)$, podemos sustituir y en función de x e integrar.

2. Rotación alrededor del eje OY

Sea AB (Fig. 16.3) una parte de la curva de $y = f(x)$.

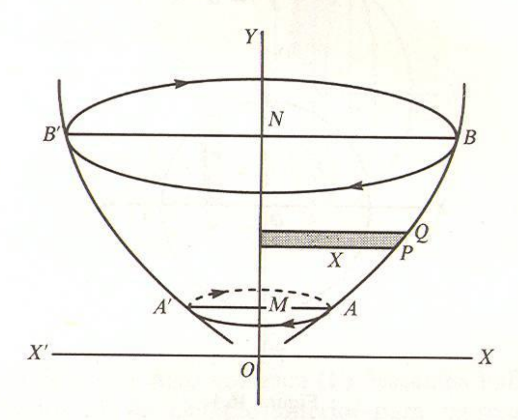


Figura 16.3

Hagamos girar AB alrededor de OY, de modo que A y B describan los círculos que se indican, de centro M y N.

Sean $OM = a$ y $ON = b$, y sea $P(x, y)$ un punto cualquiera y Q otro punto de coordenadas $(x + \delta x,\ y + \delta y)$.

Entonces, utilizando el mismo método que en el ejemplo anterior, la rodaja engendrada por PQ se convierte, en el límite, en

$$\pi x^2 dy$$

Luego el volumen del sólido completo es la suma de todas las rodajas de ese tipo entre los límites $y = a$ e $y = b$.

$$V = \int_a^b \pi x^2 dy \tag{2}$$

A partir de la ecuación $y = f(x)$, se puede expresar x en función de y, sustituir e integrar.

16.4. Volumen de una esfera

Sea la ecuación del círculo de la figura 16.4.

$$x^2 + y^2 = a^2$$

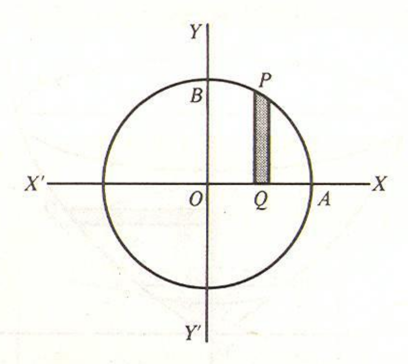


Figura 16.4

El centro está en el origen de coordenadas y el radio $OA = a$. Hagamos girar el cuadrante OAB alrededor de OX. El volumen engendrado será el de una semiesfera.

Utilizando la fórmula (1) del apartado anterior, y representando por V el volumen de la esfera, tenemos:

$$V = 2 \times \int \pi y^2 dx =$$

$$= 2\int_0^a \pi(a^2 - x^2)dx = \qquad (3)$$

$$= 2\pi\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = 2\pi\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right) = 2\pi \cdot \frac{2}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

16.5. Volumen de la porción de una esfera comprendida entre dos planos paralelos

En la figura 16.5 hagamos girar el cuadrante OCD del círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de OX hasta engendrar una semiesfera. Con dos planos paralelos, distantes de O $OA = a$ y $OB = b$, obtengamos

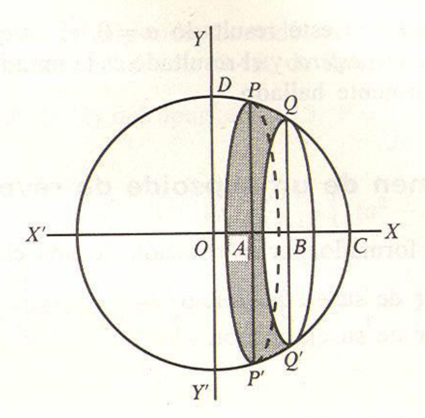


Figura 16.5

un segmento de esfera cuyo volumen (V) deseamos hallar. Podemos usar la ecuación (3) del ejemplo anterior para expresar V.

Entonces,

$$V = \int_a^b \alpha(r^2 - x^2)dx = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_a^b =$$

$$= \pi\left[\left(r^2b - \frac{1}{3}b^3\right) - \left(r^2a - \frac{1}{3}a^3\right)\right] =$$

$$= \pi\left[r^2(b - a) - \frac{1}{3}(b^3 - a^3)\right] =$$

$$= \pi(b - a)\left[r^2 - \frac{1}{3}(b^2 + ab + b^2)\right]$$

Si $b = r$, la porción en cuestión de la esfera se convierte en un *casquete esférico*. Entonces

$$V = \pi(r - a)\left[r^2 - \frac{1}{3}(r^2 + ar + a^2)\right]$$

Nota. Cuando en este resultado $a = 0$, el casquete esférico se convierte en una *semiesfera*, y el resultado es la mitad del volumen de la esfera anteriormente hallado.

16.6. Volumen de un elipsoide de revolución

Es el sólido formado por la rotación de una elipse

1. alrededor de su eje mayor, o
2. alrededor de su eje menor.

1. Rotación alrededor del eje mayor

La rotación, como se indica en la figura 16.6, se supone que tiene lugar alrededor de AA', esto es, OX.

Por consiguiente, cualquier sección perpendicular a OX es un círculo.

Sea la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

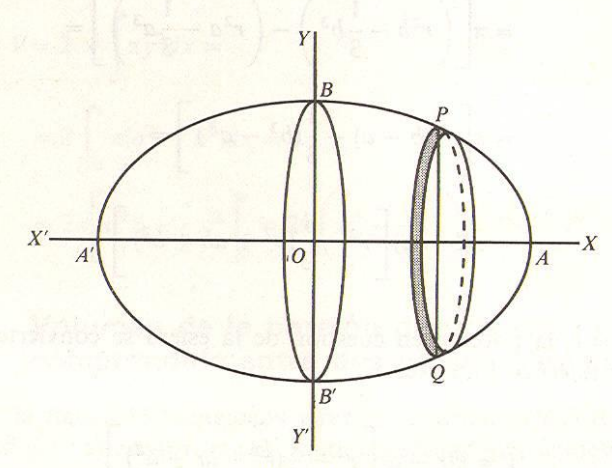


Figura 16.6

Sea V el volumen del elipsoide. Considérese el volumen engendrado por la rotación del cuadrante OAB, de límites 0 y a. Entonces, utilizando la fórmula (1) del apartado 16.3, $V = \int_0^a \pi y^2 dx$.

$$V = 2\int_0^a \pi\left[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)\right]dx = \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left[a^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{1}{3}a^3\right)$$

Luego

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

Nota. Si $b = a$, el elipsoide se convierte en una esfera.

2. Rotación alrededor del eje menor

Sea la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

En este caso, como se indica en la figura 16.7, al ser la rotación alrededor de OY, cualquier punto $P(x, y)$ de la circunferencia de la elipse describirá un círculo de radio x y centro en OY.

El área de dicho círculo será πx^2.

Luego el volumen del trozo entre dos de estos círculos infinitamente próximos será

$$V = \pi x^2 dy$$

Utilizando la fórmula (2) del apartado 16.3, y considerando la mitad del elipsoide por encima de OX, tenemos, siendo los límites de y, b y 0:

$$\text{Volumen del semielipsoide} = \int_0^b \pi x^2 dy$$

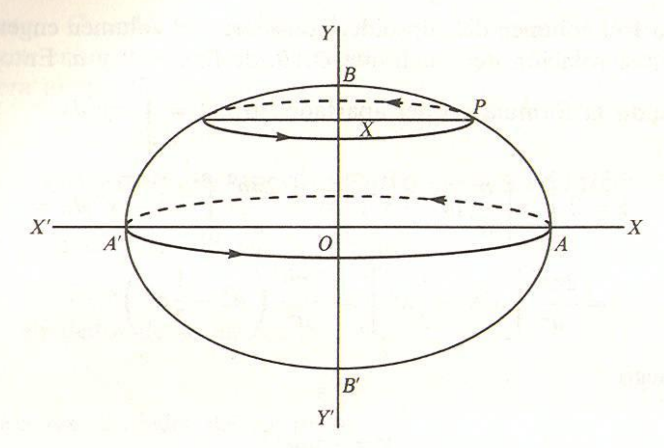


Figura 16.7.

Por ello, el volumen del elipsoide completo será

$$V = 2\pi \int_0^b x^2 dy = 2\pi \int_0^b \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)dy =$$

$$= 2\pi \frac{a^2}{b^2} \int_0^b (b^2 - y^2)dy = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left[b^2 y - \frac{1}{3}y^3\right]_0^b = \frac{2\pi a^2}{b^2}\left(b^3 - \frac{1}{3}b^3\right)$$

Luego

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2 b$$

El sólido formado por la rotación de la elipse alrededor del

1. Eje mayor se llama *esferoide prolato.*
2. Eje menor se llama *esferoide oblato.*

Nota. El sólido, no de revolución, en el que las secciones perpendiculares al plano de XOY, así como las paralelas a dicho plano, *son todas elipses*, se llama *elipsoide.*

16.7. Paraboloide de revolución

El paraboloide es el sólido engendrado por la rotación de una parábola alrededor de su eje. No es una curva cerrada, y, consiguientemente, sólo podemos obtener el sólido engendrado por una parte de la curva.

Se dan dos casos:

1. El eje de la parábola coincide con OX

La forma general de la ecuación en este caso es:

$$y^2 = 4ax$$

OP, en la figura 16.8, representa una parte de la curva.

P es un punto cualquiera de la curva de coordenadas (x, y). PA es la ordenada de P y $OA = c$. OP gira alrededor de OX, engendrando un sólido cuya base circular es PQR.

Como se ha indicado en el apartado 16.2, el elemento de volumen es $\pi y^2 dx$, y los límites de x son 0 y c. Sea V el volumen:

$$V = \int_0^c \pi y^2 dx = \pi \int_0^c 4ax dx = \pi a \left[2x^2 \right]_0^c = 2\pi ac^2$$

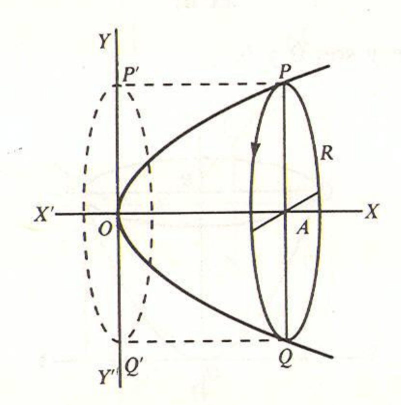


Figura 16.8.

Nota. El cilindro indicado con las líneas discontinuas en la figura 16.8, que tiene PQR como base, y un círculo igual y paralelo a dicha base y con centro en O, es el cilindro que circunscribe al paraboloide.

El volumen de este cilindro es

$$V = \pi y^2 \cdot OA = \pi \cdot 4ac \cdot c = 4\pi ac^2$$

Por tanto, *el volumen del paraboloide es la mitad de su cilindro circunscrito.*

2. El eje de la parábola coincide con OY

En la figura 16.9, QOP representa una parte de la parábola de ecuación

$$y = ax^2$$

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de la curva, y sea PB su abscisa, de modo que

$$OB = b$$

El elemento de volumen, como se indicó en el apartado 16.3B, es

$$\pi x^2 dy$$

Los límites de y son 0 y b.

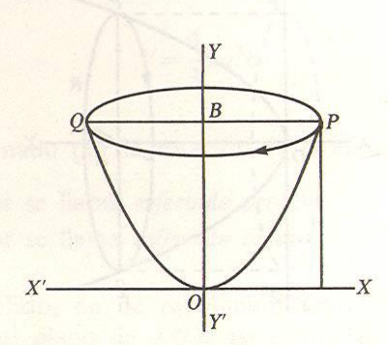


Figura 16.9.

Luego, usando la fórmula (2) del apartado 16.3:

$$V = \int_0^b \pi x^2 dy = \pi \int_0^b \frac{y}{a} dy = \frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^b = \frac{1}{2}\frac{\pi b^2}{a}$$

Nota. Compárese este resultado con el volumen del cilindro circunscrito.

3. Parábola de ecuación $y = kx^2$ y que gira alrededor de OX

La parábola ahora no gira alrededor de su propio eje, que coincide con OY, sino del otro eje.

Sea la curva OQP (Fig. 16.10) una porción de la curva de la función entre el origen y $x = a$, siendo PM la ordenada de P y $OM = a$.

Sea V el volumen engendrado por OP al girar la curva alrededor de OX, ocupando la curva la posición $OQ'P'$ tras una semirrotación.

Utilizando la fórmula (1) del apartado 16.3, el elemento de volumen es $\pi y^2 dx$, y los límites de x son 0 y a:

$$V = \int_0^a \pi y^2 dx = \pi \int_0^a (kx^2)^2 dx = \pi k^2 \left[\frac{1}{5}x^5\right]_0^a = \frac{1}{5}\pi k^2 a^5$$

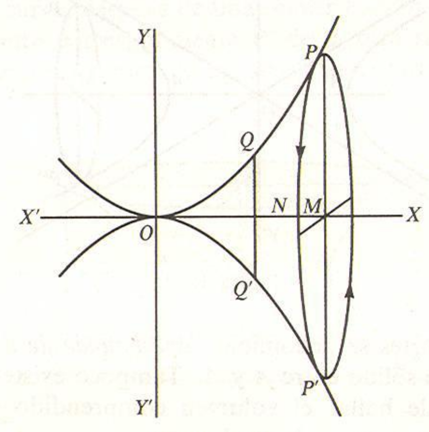


Figura 16.10.

Si la parte de la curva que ha girado es QP, siendo QN la ordenada de Q y $ON = b$, entonces el volumen engendrado viene dado por

$$V = \int_b^a \pi y^2 dx = \frac{1}{5}\pi k^2(a^5 - b^5)$$

16.8. Hiperboloide de revolución

Es el sólido engendrado por la rotación de una hipérbola. Puede adoptar diferentes formas:

1. Rotación alrededor de OX de la curva cuya ecuación es $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Puesto que la curva tiene dos ramas simétricas, como se ha mostrado previamente, existirán dos sólidos correspondientes, uno de los cuales se representa en la figura 16.11.

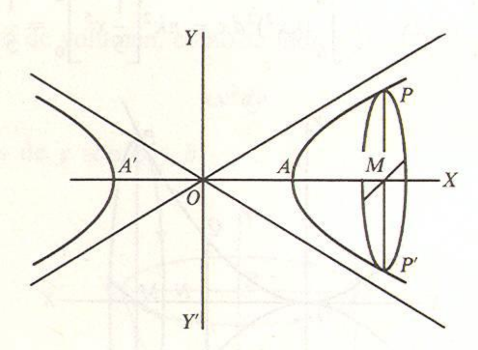


Figura 16.11.

Estas dos partes se denominan *hiperboloide de dos hojas*. Claramente, no existe sólido entre A y A'. Tampoco existe sólido cerrado, aunque se puede hallar el volumen comprendido entre secciones correspondientes a dos valores de x.

Sea P un punto cualquiera de la curva, y PM su ordenada; sea $OM = c$ y sea V el volumen entre el vértice A, siendo $x = a$ y $x = c$. Entonces:

$$V = \int_a^c \pi y^2 dx = \pi \int_a^c \frac{b^2(x^2 - a^2)}{a^2} =$$

$$= \frac{\pi b^2}{a^2}\left[\frac{1}{3}x^3 - a^2 x\right]_a^c = \frac{\pi b^2}{3a^2}(c^3 - 3a^2 c - a^3 + 3a^3) =$$

$$= \frac{\pi b^2}{3a^2}(c^3 - 3a^2 c + 2a^3)$$

2. Rotación alrededor de OY

Sea la ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

El sólido formado será como el que se indica en la figura 16.12.

Puesto que las dos partes de la curva son simétricas, cualquier punto P de la curva, después de una semirrotación completa, coincidirá con el punto correspondiente P' de la otra rama. Este punto, como cualquier otro punto de la curva, describirá un círculo.

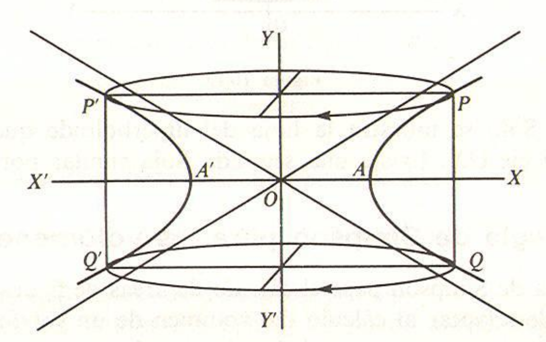


Figura 16.12.

El sólido es, por tanto, continuo y se llama *hiperboloide de una hoja*. Se extiende indefinidamente alrededor del eje OY, y cualquier volumen que se quiera determinar estará limitado por las secciones correspondientes a dos valores de y, por ejemplo, y_1 e y_2.

Este volumen se puede hallar por el mismo procedimiento descrito en ejemplos anteriores.

3. Rotación de la hipérbola equilátera alrededor de sus asíntotas

Como se ha indicado en el apartado 14.3, ejemplo 7, estas asíntotas son los ejes rectangulares OX y OY. La ecuación de la curva es $xy = c^2$, y el sólido consta de dos partes, por encima y por debajo de OX.

La porción de volumen comprendida entre dos secciones paralelas a uno de los ejes se puede hallar por el procedimiento habitual. Así, si P y Q son dos puntos de la curva (Fig. 16.13), y los valores correspondientes de y son y_1 e y_2, el volumen vendría dado por

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2 dy$$

Figura 16.13

Nota. Sólo se muestra la hoja del hiperboloide que está por encima del eje OX. Existe una segunda hoja similar por debajo.

16.9. Regla de Simpson para los volúmenes

La regla de Simpson para el cálculo de áreas de figuras irregulares se puede adaptar al cálculo del volumen de un sólido irregular. Así, si se conocen a intervalos iguales las áreas de las secciones

transversales del sólido, se pueden representar como ordenadas de una curva irregular. Por ejemplo, en la figura 14.26 del ejercicio 40 del capítulo 14, cada una de las ordenadas representa el área de una sección transversal del sólido irregular e I representa la distancia entre las secciones transversales. Entonces, la suma de sus productos, que son representados por áreas en la figura 14.26, representará el volumen del sólido. Empleando la regla de Simpson de la misma manera que en el ejercicio 40 del capítulo 14, hallamos el área de la figura irregular. En el ejercicio enunciado, el área calculada fue 73,5 m^2, de modo que ahora el volumen del sólido irregular es 73,5 m^3.

Nota. Cuando los valores de las áreas de las secciones no se conocen a intervalos iguales, se trazan los valores dados, se representa la curva y luego las ordenadas buscadas se trazan y miden.

ÁREAS DE SUPERFICIES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

16.10. Área de la superficie lateral del cono recto circular

La superficie lateral desenrrollada de un cono recto circular es un sector circular. El problema, entonces, consiste en determinar el área de este sector, y esto se puede hallar empleando métodos previamente dados.

Sea l el radio del sector (esto es, el lado inclinado del cono), r el radio del círculo de la base del cono, y A el área de la superficie lateral del cono.

Entonces, se puede demostrar fácilmente que

$$A = \pi r l$$

Área de la superficie lateral de un tronco de cono

Córtese el cono de la figura 16.14 con un plano, CD, paralelo a la base.

Entonces, $ABDC$ es un tronco de cono.

La superficie lateral del tronco se puede considerar como el límite de un gran número de pequeños trapecios, como $PQRS$.

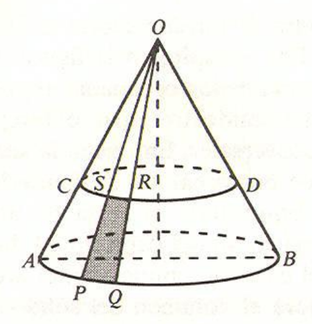


Figura 16.14

Utilizando la fórmula del área de un trapecio, en el límite, la suma, esto es, el área lateral del tronco de cono es:

$$AC \times \frac{1}{2} \quad \text{(suma de la circunferencia de los círculos } AB \text{ y } CD\text{)}$$

Si r = radio de la base (AB) y r_1 = radio de la sección (CD), entonces:

$$\text{Área} = \frac{1}{2} AC \times 2\pi(r_1 + r)$$

16.11. Fórmula general para el área de una superficie de revolución

Sea AB (Fig. 16.15) una porción de una curva que gira alrededor de OX, engendrando un sólido de revolución. Queremos hallar una expresión para la superficie de este sólido.

Sea PQ una parte pequeña de la curva que, al girar, engendra una porción (sombreado) de la superficie total.

Sea $PQ = \delta s$.

P y Q, al girar, describen los círculos PP' y QQ' con centros en M y N sobre el eje OX.

Sea $PM = y$. Entonces, $QN = y + \delta y$.

Si PQ es muy pequeño, la porción de superficie que genera puede considerarse como la superficie del tronco de un cono.

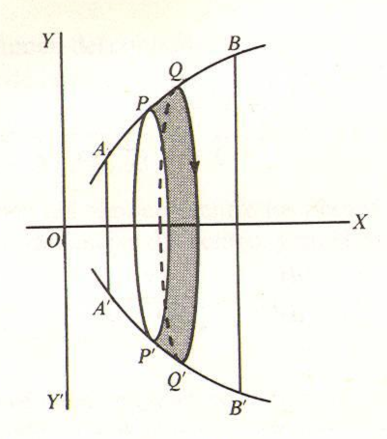


Figura 16.15

Luego, como se indicó en el apartado 16.10, su área es $2\pi \cdot \{[y + (y + \delta y)]/2\} \cdot \delta s$.

Si PQ se hace infinitamente pequeño, de modo que $\delta y \to 0$, entonces, en el límite, el área de la franja es $2\pi y ds$.

Se demostró en el apartado 15.2 que

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \quad \left[\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy\right]$$

Por tanto, si s es el área total de la superficie:

$$s = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx \qquad (1)$$

o

$$s = 2\pi \int y \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy \qquad (2)$$

16.12. Área de la superficie de una esfera

Sea $x^2 + y^2 = a^2$ la ecuación de un círculo que engendra una esfera al girar alrededor del eje OX, con el que coincide, por tanto, un diámetro.

Puesto que

$$x^2 + y^2 = a^2$$

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

tendremos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Luego:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}}\,dx = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 - x^2}}\,dx = \frac{a}{y}dx$$

Los límites de la integral cuando un cuadrante gira son 0 y a, dando lugar a una semiesfera.

Utilizando la fórmula (1) anterior, la superficie de la semiesfera será:

$$2\pi \int_0^a y \cdot \frac{a}{y} dx = 2\pi \int_0^a a dx = 2\pi a \Big[\, x \,\Big]_0^a = 2\pi a^2$$

Área de la superficie de la esfera $= 4\pi a^2$.

EJERCICIOS

1. Hallar el volumen engendrado por el arco de la curva $y = x^2$:

a) Cuando gira alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 3$.
b) Cuando gira alrededor del eje OY entre $x = 0$ y $x = 2$.

2. Hallar el volumen engendrado por un arco de la curva $y = x^3$:

a) Cuando gira alrededor del eje OX entre $x = 0$ y $x = 3$.
b) Cuando gira alrededor del eje OY entre $x = 0$ y $x = 2$.

3. Hallar el volumen del cono formado por el giro alrededor del eje OX de la porción de la recta $2x - y + 1 = 0$ interceptada entre los ejes.

4. El círculo $x^2 + y^2 = 9$ gira alrededor de un diámetro que coincide con el eje OX. Hallar

a) El volumen del segmento entre los planos perpendiculares a OX cuyas distancias del centro, y en el mismo lado de éste, son 1 y 2.

b) El volumen del casquete esférico cortado por el plano cuya distancia del centro es 2.

5. Hallar el volumen engendrado por el giro de la elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ alrededor de su eje mayor.

6. Hallar el volumen engendrado por el giro alrededor del eje OX de la porción de la curva $y^2 = 4x$ comprendida entre el origen y $x = 4$.

7. Hallar el volumen engendrado por el giro de una rama de la hipérbola $x^2 - y^2 = a^2$ alrededor de OX, entre los límites $x = 0$ y $x = 2a$.

8. Hallar el volumen del sólido engendrado por el giro alrededor del eje OY de la parte de la curva de $y^2 = x^3$ comprendida entre el origen e $y = 8$.

9. Hallar el volumen del sólido engendrado por el giro alrededor del eje OX de la porción de la curva $y = \operatorname{sen} x$ comprendida entre $x = 0$ y $x = \pi$.

10. Hallar el volumen engendrado por el giro alrededor del eje OX de la parte de la curva $y = x(x - 2)$ que cae por debajo del eje OX.

11. Si la curva $xy = 1$ se hace girar alrededor del eje OX, hallar el volumen engendrado por la porción de la curva interceptada entre $x = 1$ y $x = 4$.

12. Las parábolas $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$ se cortan y el área comprendida entre las curvas se hace girar alrededor del eje OX. Hallar el volumen del sólido engendrado de esta manera.

13. Hallar el área de la superficie del sólido engendrado por el giro de la recta $y = \dfrac{3x}{4}$ alrededor del eje OX, entre los valores $x = 0$ y $x = 3$.

14. Hallar el área de la superficie engendrada por el giro alrededor de OX de la curva de $y = \operatorname{sen} x$, entre $x = 0$ y $x = \pi$.

15. Se hace girar alrededor del eje OY la porción de la curva $x^2 = 4y$ interceptada entre el origen y la recta $y = 8$. Hallar el área de la superficie del sólido engendrado.

16. La curva de la función $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ gira alrededor de OX. Hallar el área de la superficie del sólido formado entre $x = 0$ y $x = a$.

17. Hallar el área de la superficie de la zona cortada en una esfera de radio r por dos planos paralelos separados entre sí una distancia h.

18. Hallar el área de la superficie del sólido engendrado al rotar alrededor del eje OX la porción de la curva $y = x^3$, entre $x = 0$ y $x = 1$.

17 Uso de la integración en mecánica

CENTRO DE GRAVEDAD

La integración, como un método de sumas, se puede aplicar a la resolución de muchos problemas en mecánica, en los que se requiere encontrar la suma de un número infinito de productos infinitesimalmente pequeños. En este capítulo se incluyen algunos de estos problemas, aunque en un libro del tamaño y orientación del presente volumen sólo se pueden dar unos cuantos ejemplos de los más sencillos.

17.1. Centro de gravedad de un conjunto de partículas

Se demuestra en los tratados de mecánica que si una serie de fuerzas paralelas actúan sobre un cuerpo, el punto a través del cual se puede considerar que actúa su resultante se llama *centro de fuerza*; también, la resultante es la suma algebraica de estas fuerzas paralelas.

Esto se puede también expresar de otra manera. Así:

Sean m_1, m_2, m_3, ..., las masas de un número dado de partículas.

Sean (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ..., las coordenadas de las posiciones de las partículas respecto a dos ejes rectangulares, OX y OY.

Sobre cada partícula actúa la *fuerza de la gravedad*, a la que se llama *peso* de la partícula y es proporcional a su masa.

Puesto que esta fuerza está dirigida siempre hacia el centro de la

tierra, estas fuerzas, en un pequeño sistema de partículas, se pueden considerar como un sistema de fuerzas paralelas, que se pueden denotar por

$$m_1g_1,\ m_2g_2,\ m_3g_3,\ \ldots$$

o

$$w_1,\ w_2,\ w_3,\ \ldots$$

en donde w representa el peso de una partícula.

El centro de fuerza de este sistema es el centro de gravedad de las partículas.

Sean $(\bar{x}, \bar{y})$ las coordenadas del centro de gravedad.

Sea M la suma de las masas de las partículas, esto es,

$$M = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots$$

o

$$M = \sum(m)$$

El producto de la masa por la distancia *de la partícula a un punto o eje cualquiera se denomina* momento *de la fuerza respecto a ese punto o eje.*

En mecánica se demuestra que *el momento respecto a un eje cualquiera de la resultante que actúa en el centro de fuerza es igual a la suma de los momentos de las partículas respecto al mismo eje.*

Por tanto, considerando el sistema anterior de partículas y tomando momentos respecto a OY, tenemos:

$$Mg\bar{x} = m_1gx_1 + m_2gx_2 + m_3gx_3 + \cdots$$

o, dividiendo por g,

$$M\bar{x} = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots$$

Luego, con la notación algebraica habitual:

$$\bar{x} = \frac{\sum(mx)}{\sum(m)}$$

Similarmente, considerando los momentos respecto a OX,

$$\bar{y} = \frac{\sum(my)}{\sum(m)}$$

El punto $(\bar{x}, \bar{y})$, cuyos momentos hemos hallado, es el *centro de masa* del sistema, o considerando que la fuerza de la gravedad actúa sobre las masas, el *centro de gravedad (c.g.)* del sistema.

17.2. Centro de gravedad de un cuerpo continuo

En el apartado anterior hemos considerado el c.g. de un sistema de partículas, independientemente de las distancias existentes entre ellas. Sin embargo, un cuerpo sólido continuo se puede considerar como constituido por un número infinito de partículas infinitamente pequeñas, y el centro de gravedad de estas partículas como el centro de gravedad del cuerpo.

Como el momento de cada una de estas partículas respecto a un eje es el producto de su masa por su distancia al eje, el problema de hallar la suma de estos productos nos sugiere inmediatamente la integración como el medio de llevarla a cabo. La aplicación del método de integración se muestra muy fácilmente mediante ejemplos, como los que vamos a explicar a continuación.

Conviene advertir que el c.g. de un cuerpo debe caer claramente sobre cualquiera de los ejes de simetría que posea el cuerpo. Por ejemplo, el c.g. de un sólido de revolución debe claramente caer sobre el eje alrededor del que está produciéndose el giro. Esto sugiere que, para hallar del c.g., lo más simple generalmente será tomar el eje de revolución como eje de coordenadas.

17.3. Determinación del centro de gravedad de una lámina semicircular uniforme

Evidentemente, el c.g. cae sobre el radio que es perpendicular al diámetro del semicírculo en su centro, esto es, sobre OA en la figura 17.1. Esta recta debe tomarse, por tanto, como el eje OX, y el diámetro como el eje OY.

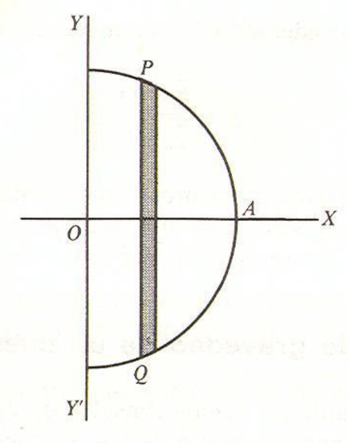


Figura 17.1

Si el radio del círculo es a, su ecuación es

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Como la lámina es uniforme, su masa, o la de cualquier parte de ella, puede representarse por su área. Si m es la masa de la unidad de área, aparecerá a ambos lados de las ecuaciones halladas en el apartado 17.2, y así se eliminará.

Sea $\bar{x}$ la distancia a O del c.g., a lo largo de OX.

Si se considera una franja estrecha, de anchura, δx, a una distancia x de OY, como la que se indica con PQ en la figura 17.1, entonces:

$$\textit{Área} \text{ de la franja} = 2y \cdot \delta x$$

y

$$\textit{Momento} \text{ de la franja} = 2y\delta x \cdot x$$

En el límite, cuando la anchura de cada franja se hace infinitamente pequeña, la suma de las áreas de las franjas, esto es, el área del semicírculo será

$$\int_0^a 2ydx$$

Y la suma de los momentos de las franjas

$$\int_0^a 2ydx \cdot x = \int_0^a 2yxdx$$

Por el principio de los momentos:

$$\bar{x} \times \int_0^a 2ydx = \int_0^a 2xydx$$

$$\bar{x} = \int_0^a 2xydx \div \int_0^a 2ydx$$

Pero

$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

Luego

$$\bar{x} = \int_0^a 2x\sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx \div \int_0^a 2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^a \div \frac{1}{2}\pi a^2 = \quad \text{(Ap. 14.3, ejemplo 3.)}$$

$$= \frac{2}{3}a^3 \div \frac{1}{2}\pi a^2$$

Por tanto,

$$\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

17.4. Centro de gravedad de una semiesfera sólida

Hagamos girar alrededor de OX el semicírculo del ejemplo anterior, de modo que engendre una semiesfera. El c.g. caerá sobre el eje de rotación, OX,

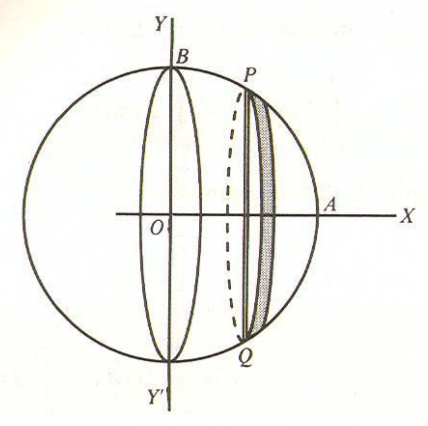


Figura 17.2

Sea $\bar{x}$ su distancia a O. La ecuación de la curva es:

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Radio del círculo $= a$.

El rectángulo PQ del ejemplo anterior engendrará al girar una rodaja que se puede considerar cilíndrica cuando la anchura del rectángulo es muy pequeña. En el límite el volumen será:

Volumen $= \pi y^2 dx$

Volumen de la semiesfera $= \int_0^a \pi y^2 dx$

Momento de la rodaja cilíndrica $= \pi y^2 dx \cdot x$

Suma de los momentos de todas esas rodajas $= \int_0^a \pi y^2 x dx$

Momento de la semiesfera $= \bar{x} \cdot \int_0^a \pi y^2 dx$

Pero se cumple la igualdad

$$\bar{x} \cdot \int_0^a \pi y^2 dx = \int_0^a \pi y^2 x dx$$

Luego

$$\bar{x} = \pi \int_0^a x(a^2 - x^2)dx \div \int_0^a (a^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{2} a^2 x^2 - \frac{1}{4} x^4 \right]_0^a \div \frac{2}{3} \pi a^3 = \qquad \text{(Ap. 16.4.)}$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} a^4 - \frac{1}{4} a^4 \right) \div \frac{2}{3} \pi a^3 =$$

$$= \frac{1}{4} \pi a^4 \div \frac{2}{3} \pi a^3$$

Luego

$$\bar{x} = \frac{3}{8} a$$

17.5. Centro de gravedad del paraboloide engendrado por el giro de la curva $y = x^2$ alrededor de OY

Sean los límites de x 0 y 2. Cuando $x = 2$, $y = 4$. En la figura 17.3 se representa el sólido engendrado por el giro alrededor de OY de la porción de la parábola $y = x^2$, entre los valores $x = 0$ y $x = 2$ (Ap. 16.7). El c.g. cae sobre OY. Sea $\bar{y}$ su distancia a O. PQ representa una rodaja cilíndrica formada, como en el ejemplo anterior, por el giro de un rectángulo de muy pequeña anchura. Sean (x, y) las coordenadas de P.

En el límite, cuando la anchura del rectángulo se hace infinitamente pequeña, tenemos:

Volumen de la rodaja $= \pi x^2 dy$

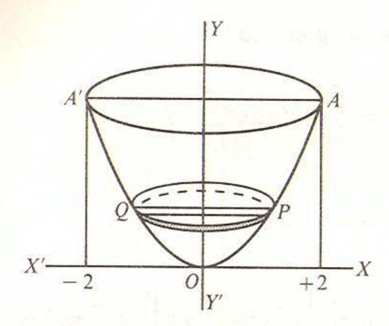


Figura 17.3

Momento de la rodaja respecto a $OX = \pi x^2 dy \cdot y$

Suma de los momentos de todas esas rodajas $= \int_{y=0}^{y=4} \pi x^2 dy \cdot y$ (1)

Volumen del sólido completo $= \int_0^4 \pi x^2 dy$

Momento del sólido completo $= \bar{y} \cdot \int_0^4 \pi x^2 dy$ (2)

Igualando (1) y (2):

$$\bar{y} \cdot \int_0^4 \pi x^2 dy = \int_0^4 \pi x^2 y dy$$

$$\bar{y} = \int_0^4 \pi y^2 dy \div \int_0^4 \pi y dy =$$

(Puesto que $x^2 = y$.)

$$= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 \right]_0^4 \div \pi \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^4 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} \times 4^3 \right) \div \left(\frac{1}{2} \times 16 \right) = \frac{8}{3}$$

Luego el c.g. está a 8/3 unidades de O, a lo largo de OY.

Nota. Este valor son los 2/3 de la altura del sólido.

17.6. Centro de gravedad de un arco circular uniforme

Sea BCA (Fig. 17.4) un arco circular,

r = Radio del arco, con centro en O.
2α = Ángulo subtendido en el centro.

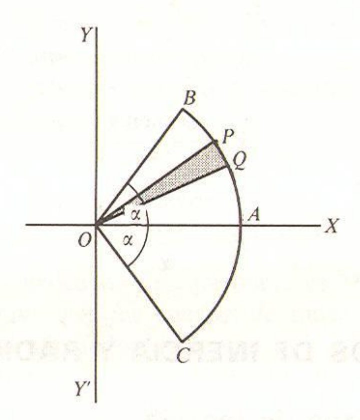


Figura 17.4

Trácese OA, bisectriz de este ángulo.

Sea OA el eje OX. El c.g. del arco debe caer sobre OA.

Sea $\bar{x}$ la distancia del c.g. a O, y sea P el punto (x, y), y PQ un pequeño arco que subtiende un ángulo $\delta\theta$ en el centro O. Entonces,

$$PQ = r\delta\theta$$

El c.g. de todos los arcos similares a PQ debe caer sobre OA.

Momento de PQ respecto a $O = r\delta\theta \cdot x$, y $x = r\cos\theta$.
Momento de PQ respecto a $O = r^2 \cos\theta\delta\theta$.

En el límite, cuando PQ se hace infinitamente pequeño:

Momento de $PQ = r^2 \cos\theta\delta\theta$.

Masa del arco $BC = r \cdot 2\alpha$ (lo que representa la masa por la longitud, ya que el arco es uniforme).

Momento del arco $= \bar{x} \cdot r \cdot 2\alpha$.

Igualando los momentos:

$$\bar{x} \cdot 2r\alpha = \int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos\theta d\theta = 2\int_0^{\alpha} r^2 \cos\theta d\theta$$

$$\bar{x} \cdot 2r\alpha = 2r^2\Big[\operatorname{sen}\theta\Big]_0^{\alpha} = 2r^2 \operatorname{sen}\alpha$$

Entonces:

$$\bar{x} = \frac{2r^2 \operatorname{sen}\alpha}{2r\alpha}$$

$$\bar{x} = \frac{r \operatorname{sen}\alpha}{\alpha}$$

MOMENTOS DE INERCIA Y RADIO DE GIRO

17.7. Momentos de inercia

Sean m_1, m_2, m_3, ..., las masas de una serie de partículas que forman un sistema.

Sean r_1, r_2, r_3, ..., sus distancias a una línea recta o eje dados.

Entonces, la suma de los productos

$$m_1r_1^2,\ m_2r_2^2,\ m_3r_3^2,\ \ldots \quad \text{o} \quad \sum(mr^2)$$

se denomina el *momento de inercia del sistema*, y se denota ordinariamente por M.I. o I.

También se llama el *segundo momento* del sistema, mientras que $\sum(mr)$, que se ha definido en el apartado 17.2, se llama el *primer momento*.

Como quedó indicado cuando se trató del centro de gravedad (Ap. 17.2), un cuerpo rígido continuo puede considerarse como un sistema de partículas infinitamente pequeñas que, con la notación habitual, pueden expresarse mediante dm.

La suma de los productos o segundos momentos es entonces

$\sum r^2 dm$. Esta suma, tomada a lo largo del cuerpo, se convierte en el límite en la integral $\int r^2 dm$.

$$\text{M.I.} = \int r^2 dm$$

El momento de inercia tiene una gran importancia cuando el cuerpo está girando alrededor de un eje.

Supóngase que un cuerpo de masa M se mueve en línea recta con una velocidad v. Entonces, su

$$\text{Energía cinética} = \frac{1}{2} M v^2$$

Así, la energía cinética de una partícula es $1/2\, v^2 dm$.

Ahora, supóngase que un cuerpo de masa M gira con una velocidad angular ω alrededor de un eje.

Entonces, una partícula dm se mueve en un instante cualquiera con una velocidad lineal $v = r\omega$.

Su energía cinética es:

$$\text{E.C.} = \frac{1}{2} dm v^2$$

Éste es,

$$\frac{1}{2} dm (r\omega)^2$$

La energía cinética total del cuerpo es:

$$\text{E.C.} = \int \frac{1}{2} (r\omega)^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 \cdot \text{M.I.}$$

$$\text{Energía cinética total} = \frac{1}{2} (\text{momento de inercia}) \cdot \omega^2$$

17.8. Radio de giro

Si el momento de inercia se escribe en la forma

$$I = Mk^2$$

de modo que

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

entonces k se llama el *radio de giro del cuerpo.*

A partir de estas afirmaciones está claro que:

La energía cinética de un cuerpo y el momento de inercia son iguales si se supone que toda la masa del cuerpo está concentrada en un punto cuya distancia al eje de giro es k.

Ejemplos resueltos

1. Hallar el momento de inercia y el radio de giro de una varilla rígida alrededor de un eje perpendicular a la varilla en su centro.

Sea M la masa de la varilla y $2a$ su longitud.

Puesto que la varilla es uniforme, su masa por unidad de longitud es $M/2a$.

Sea O (Fig. 17.5) el centro de la varilla y OY la perpendicular que pasa por O.

Se desea hallar el M.I. de la varilla respecto a OY.

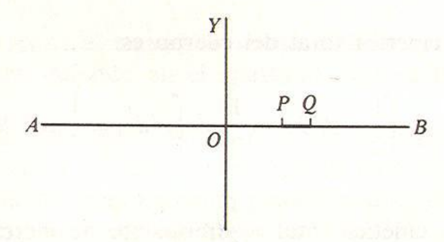


Figura 17.5.

Sea PQ un elemento pequeño δx, y $OP = x$. Entonces, PQ tiene una masa $\frac{M}{2a}\delta x$, luego el M.I. del elemento PQ respecto a O es

$$\frac{M\delta x}{2a}x^2$$

En el límite, cuando este elemento se hace infinitamente pequeño,

$$\text{M.I. de toda la varilla} = \int_{-a}^{a} \frac{Mx^2}{2a}dx = \frac{M}{2a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-a}^{a} = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$

Puesto que

$$Mk^2 = \frac{1}{3}Ma^2$$

$$k = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

2. Hallar el M.I. de una lámina rectangular uniforme de masa M, respecto a un eje que bisecta la lámina en dos partes opuestas.

Sea $ABCD$ (Fig. 17.6) el rectángulo, YOY' el eje respecto al que hay que hallar el M.I., y sea $AB = 2a$.

Considérese una pequeña franja PQ de masa M_1.

Por el ejemplo 1, su M.I. $= 1/3M_1a^2$.

El M.I. del rectángulo entero es igual a la suma de todas las franjas semejantes, esto es:

$$\text{M.I.} = \frac{1}{3}(M_1a^2 + M_2a^2 + M_3a^2 + \cdots) =$$

$$= \frac{1}{3}a^2(M_1 + M_2 + M_3 + \cdots) = \frac{1}{3}Ma^2$$

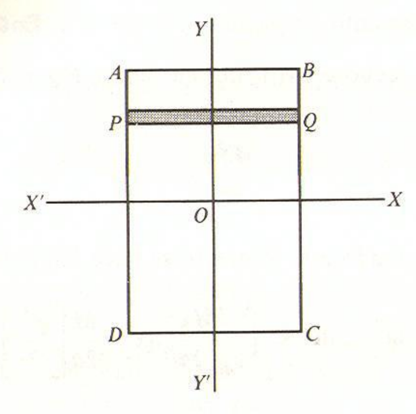


Figura 17.6

3. Hallar el M.I. de una lámina circular uniforme de radio r y masa M, respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular al plano de la lámina.

La figura 17.7*a* representa el círculo de centro O, siendo OY el eje perpendicular al plano del círculo alrededor del cual gira.

La figura 17.7*b* representa el plano del círculo. Una pequeña banda circular de radios x y $x + \delta x$ representa el elemento de área.

Puesto que la lámina es uniforme, la masa por unidad de área será $\dfrac{M}{\pi r^2}$.

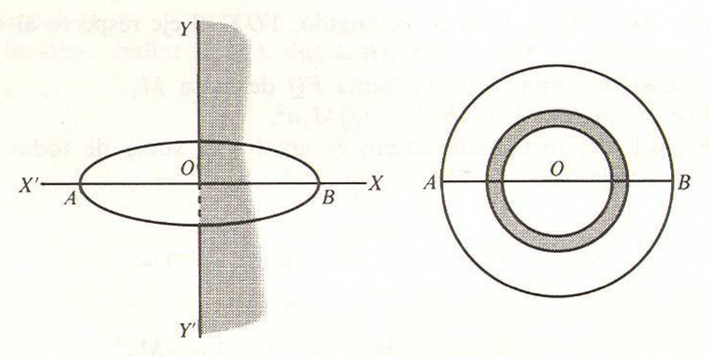


Figura 17.7*a* Figura 17.7*b*

La masa de la banda es $2\pi x\delta x \dfrac{M}{\pi r^2}$.

M.I. de la banda es $\dfrac{2M}{r^2} x^3 \delta x$.

M.I. de toda la lámina

$$\frac{2M}{r^2}\int_0^r x^3 dx = \frac{2M}{r^2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^r = \frac{2M}{r^2}\frac{r^4}{4}$$

17.9. Teoremas sobre los momentos de inercia

Los siguientes teoremas son de ayuda para calcular los momentos de inercia en ciertos casos.

a) *El momento de inercia de una lámina respecto a un eje* OZ *perpendicular a su plano es igual a la suma de los momentos de inercia respecto a un par cualquiera de ejes rectangulares* OX *y* OY *en el plano de la lámina*

Sea P una partícula de masa m en el plano de OX, OY (Fig. 17.8), y sean (x, y) sus coordenadas respecto a los ejes.

Trácese OP. Sea $OP = r$.

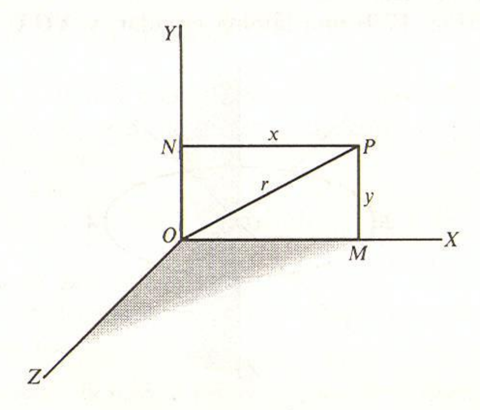


Figura 17.8

Sea OZ un eje perpendicular al plano XOY. Entonces, POZ es un ángulo recto, luego el momento de inercia de la partícula en P respecto a OZ es mr^2.

Trácense PM y PN perpendiculares a OX y OY.

Entonces:

$$OP^2 = OM^2 + MP^2 = x^2 + y^2$$

o

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Pero el momento de inercia de la masa m en P respecto a OZ es

$$\text{M.I.} = mr^2 = m(x^2 + y^2) = mx^2 + my^2 = I_x + I_y$$

o

$$I_z = I_x + I_y$$

donde I_x, I_y e I_z son los momentos de inercia de m respecto a los ejes OX, OY y OZ, respectivamente.

Esto es cierto para todas las partículas de una lámina de la que la partícula en P es una parte, y es, por tanto, cierto para toda la lámina.

Como un ejemplo, consideremos el caso de la lámina circular descrita en el ejercicio 17.

Sea ABC (Fig. 17.9) una lámina circular, y XOX' un diámetro.

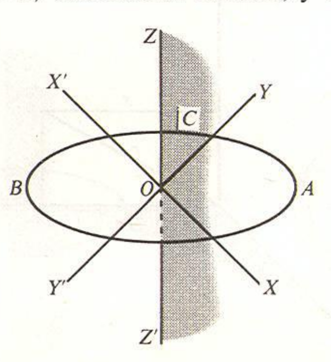


Figura 17.9

Si I_x es el M.I. respecto a este diámetro, entonces se podrá hallar el ejercicio 17 que

$$I_x = \frac{1}{4}Mr^2$$

Si I_y es otro diámetro que forma un ángulo recto con XOX', entonces

$$I_y = \frac{1}{4}Mr^2$$

$$I_x + I_y = \frac{1}{4}Mr^2 = \frac{1}{4}Mr^2 = \frac{1}{2}Mr^2$$

Si OZ es un eje perpendicular a la lámina y, por tanto, perpendicular a OX y OY, entonces, ya se demostró en el ejemplo 3 del apartado anterior que

$$I_z = \frac{1}{2}Mr^2$$

De ahí

$$I_z = I_x + I_y$$

b) *Teorema de los ejes paralelos*

Sea I_c el M.I. de una masa M respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad y sea a la distancia al centro de gravedad de un eje paralelo. Entonces

$$\text{M.I.} = I_c + Ma^2$$

Esto se puede definir así:
El momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es igual a la suma de:

1. *El momento de inercia respecto a un eje paralelo que pase por el centro de gravedad.*

2. *El producto de la masa por el cuadrado de la distancia del eje al centro de gravedad.*

Es evidente que (2), esto es, Ma^2, es la misma que el M.I. de la masa completa concentrada en el centro de gravedad, respecto al eje escogido.

Ejemplos resueltos

1. Hallar el M.I. de una lámina circular uniforme de radio a, respecto a una tangente.

En la figura 17.10, OY es la tangente de la lámina circular de centro C.

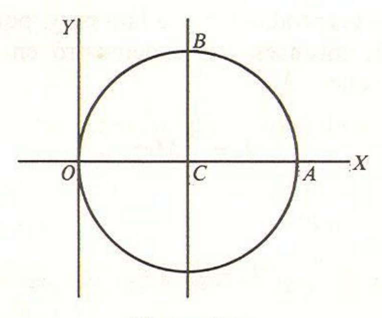


Figura 17.10.

BC es un eje paralelo a OY que pasa por C, que es, por supuesto, el c.g.

Entonces, por el teorema anterior:

$$\text{M.I. respecto a } OY = \text{M.I. respecto a } BC + Ma^2$$

Pero M.I. respecto a $BC = 1/4Ma^2$ (ejercicio 17 y ejemplo del Teorema I).

Luego:

$$\text{M.I. respecto a } OY = \frac{1}{4}Ma^2 + Ma^2 = \frac{5}{4}Ma^2$$

2. Hallar el M.I. de una lámina uniforme en forma de triángulo isósceles de altura h y ángulo de vértice 2α, respecto a:

1. Un eje que pasa por el vértice y es paralelo a la base.
2. Una recta que atraviesa el c.g. paralela a la base.
3. La base.

Constrúyase el triángulo de tal forma que sus ejes de simetría caigan a lo largo de OX (como en la figura 17.11).

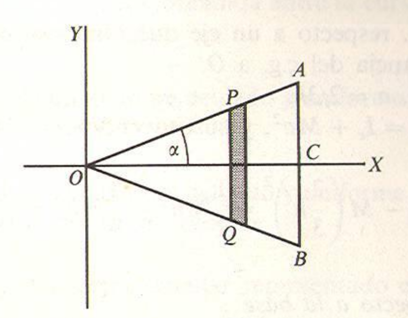


Figura 17.11

Entonces, $OC = h$ y $AC = h \operatorname{tg} \alpha$.

Sea $P(x, y)$ un punto cualquiera de OA.

La franja PQ representa un elemento de área e $y = x \operatorname{tg} \alpha$ y δx = anchura de la franja.

1. *Hallar M.I. respecto a OY*

Sea m = Masa de la unidad de área. M.I. de la franja = $= 2mg\delta x \cdot x^2$.

En el límite, M.I. del triángulo respecto a

$$OY = m \int_0^h 2yx^2 dx$$

Pero $y = x \operatorname{tg} \alpha$.

$$\text{M.I.} = M \int_0^h 2x^3 \operatorname{tg} \alpha dx = 2m \operatorname{tg} \alpha \int_0^h x^3 dx = 2m \operatorname{tg} \alpha \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^h = \frac{1}{2} mh^4 \operatorname{tg} \alpha$$

Pero la masa del triángulo, esto es,

$$M = mh \cdot h \operatorname{tg} \alpha = mh^2 \operatorname{tg} \alpha$$

$$\text{M.I.} = \frac{1}{2} Mh^2$$

2. *M.I. respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y es paralelo a* AB

Sea I_c = M.I. respecto a un eje que atraviesa el c.g.
Sea a = distancia del c.g. a O.
En este caso, $a = 2/3h$.
Utilizando $I = I_c + Ma^2$, y sustituyendo:

$$I_c = I - M\left(\frac{2}{3}h\right)^2 = \frac{1}{2}Mh^2 - \frac{4}{9}Mh^2 = \frac{1}{18}Mh^2$$

3. *M.I. respecto a la base*

Distancia del c.g. a la base = $1/3h$.
Por el teorema de los ejes paralelos:
M.I. respecto a la base

$$= (\text{M.I. respecto al eje que atraviesa el c.g.}) + \left[M \cdot \left(\frac{h}{3}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{18}Mh^2 + \frac{1}{9}Mh^2 = \frac{1}{6}Mh^2$$

EJERCICIOS

1. Hallar el centro de gravedad del segmento parabólico comprendido por $y^2 = 4ax$ y la recta $x = b$.

2. Hallar el centro de gravedad del segmento de la parábola $y^2 = 8x$ que está cortado por la recta $x = 5$ y el eje de la parábola.

3. Hallar el centro de gravedad del área comprendida por la curva $y = x^4$, el eje OY y la recta $y = 1$.

4. Hallar el c.g. del segmento parabólico de $y = x^2$, comprendido por la curva, el eje OY y la recta $y = 9$.

5. Hallar el c.g. de un cuadrante de un círculo de radio r.

6. Hallar el c.g. del área comprendida entre la curva $y = \operatorname{sen} x$ y el eje OX desde $x = 0$ a $x = \pi$.

7. Hallar el c.g. de un alambre delgado y uniforme con la forma de un semicírculo de radio r.

8. Hallar el c.g. de un alambre delgado y uniforme con la forma de un cuadrante de un círculo de radio r.

9. Hallar el c.g. del sector circular representado en la figura 17.4 como $OBAC$.

10. Hallar el c.g. del cono recto circular formado por el giro de la recta $y = mx$ alrededor del origen para $x = h$.

11. Hallar el c.g. de un cuadrante de una elipse cuyos diámetros son $2a$ y $2b$.

12. Hallar el c.g. del área comprendida por la hipérbola $xy = k^2$, el eje OX y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$.

13. Hallar el c.g. del sólido formado por el giro de $y = x^2$ alrededor del eje OX entre el origen y $x = 3$.

14. Si se hace girar alrededor del eje OX la porción de la curva $ay^2 = x^3$ que está limitada por la curva, el eje OX y la ordenada correspondiente a $x = b$, hallar el c.g. del sólido engendrado.

15. Hallar el momento de inercia y el radio de giro de una varilla recta uniforme, de longitud l, respecto a un eje perpendicular a su longitud en un extremo de la varilla.

16. Hallar el M.I. de una lámina rectangular uniforme de lados $2a$ y $2b$ respecto al lado de longitud $2b$.

17. Hallar el M.I. de una lámina circular uniforme de radio r respecto a un diámetro.

18. Hallar el M.I. respecto a OX, de la elipse cuya ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

19. Hallar el M.I. de un triángulo isósceles, de altura h, respecto a:

a) Su base.

b) Un eje que pasa por su vértice y paralelo a su base.

20. Hallar el M.I. de un cono recto circular, de radio de la base r, respecto a su eje.

21. Hallar el M.I. de un cilindro regular uniforme, de radio de la base r, respecto a su eje.

22. Hallar el M.I. de un alambre circular de radio a, respecto a un diámetro.

23. Hallar el M.I. respecto a OY del área del segmento de la parábola $y^2 = 4ax$ entre el origen y la doble ordenada correspondiente a $x = b$.

24. Hallar el M.I. y el radio de giro de una esfera uniforme de radio r, respecto a un diámetro.

25. Hallar el M.I. de una varilla uniforme de longitud $2a$, respecto a un eje perpendicular a la varilla en uno de sus extremos.

26. Hallar el M.I. de una lámina cuadrada uniforme respecto a un eje perpendicular al plano del cuadrado en una esquina.

27. Hallar el M.I. de una lámina uniforme en forma de triángulo equilátero de lado a:

a) Respecto a una paralela a la base que pasa por el centro de gravedad.

b) Respecto a un eje que pasa por el centro de gravedad y es perpendicular al plano del triángulo.

c) Respecto a una perpendicular al plano del triángulo y que pasa por el vértice.

28. Hallar el M.I. de una lámina circular uniforme de radio a respecto a un eje perpendicular al plano del disco, en un punto de la circunferencia.

29. Hallar el M.I. de un cilindro recto circular uniforme respecto a una línea que pasa por el centro del eje del cilindro y perpendicular al eje. La longitud del cilindro es $2a$ y b es el radio de la base.

30. Hallar el M.I. de una capa esférica delgada y uniforme, de radio a, respecto a un diámetro. (Véase el problema de la determinación de la superficie de una esfera, apartado 16.12.)

31. Hallar el M.I. de una esfera sólida de radio a respecto a un diámetro. (Dividir la esfera en delgadas capas concéntricas y utilizar el resultado obtenido en la cuestión anterior.)

32. Hallar el M.I. de un cono recto circular de altura h, respecto a un eje trazado por el vértice paralelo a la base, cuyo radio es r.

33. Hallar el M.I. de una lámina elíptica de ejes $2a$ y $2b$, respecto a un eje trazado por el centro de la elipse y perpendicular al plano de la misma.

34. Hallar el M.I. de una lámina rectangular uniforme de lados $2a$ y $2b$.

a) Respecto a un lado.

b) Respecto a una diagonal.

c) Respecto a un eje perpendicular al plano del rectángulo y que pasa por una esquina.

18 Diferenciación parcial

18.1. Funciones de más de una variable

Hasta ahora nos hemos ocupado sólo de funciones de una sola variable independiente. Se indicó, sin embargo, en el apartado 1.12, que una cantidad puede ser una función de dos o más variables independientes, y se dieron ejemplos de ello.

Ahora, debemos considerar, muy brevemente, el problema de la diferenciación en esos casos. Un tratamiento completo no resulta posible en un texto elemental sobre el tema, aunque algunos aspectos sencillos del problema puedan ser examinados.

18.2. Diferenciación parcial

Comenzamos con un ejemplo ya mencionado en el apartado 1.12, a saber, que el volumen de un gas depende de la presión y de la temperatura.

Sea V el volumen del gas, p la presión del mismo y t su temperatura absoluta.

La ley que relaciona estas magnitudes se puede expresar mediante la fórmula

$$V = k \cdot \frac{t}{p}$$

siendo k una constante.

1. Supóngase que la temperatura varía y la presión permanece constante.

   Entonces:

$$\frac{dV}{dt} = k \cdot \frac{1}{p}$$

2. Supóngase que la presión varía y la temperatura permanece constante.

   Entonces:

$$\frac{dV}{dp} = k \cdot \frac{t}{-p^2} \quad \text{o} \quad -k \cdot \frac{t}{p^2}$$

Así, la existencia de dos variables independientes da lugar a dos derivadas diferentes, que se llaman *derivadas parciales* (o *coeficientes diferenciales parciales*).

Por simplicidad, se ha empleado la notación habitual, aunque se utilizan símbolos especiales para indicar las derivadas parciales. En vez de la letra d, se emplea el símbolo ∂, que se lee «derivada parcial». Así, las anteriores derivadas se escribirían:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = k \cdot \frac{1}{p} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial p} = -k \cdot \frac{t}{p^2} \qquad (2)$$

Por tanto, (1) indica que V se diferencia respecto a t (por ello se escribe ∂t), mientras que p permanece constante. Igual ocurre con (2).

En general, si z es una función de x e y, las derivadas parciales se pueden expresar como:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}$, cuando x es variable e y constante (1)

$\dfrac{\partial z}{\partial y}$, cuando y es variable y x constante (2)

Utilizando la forma mencionada en el apartado 4.3, de la definición de derivada, las derivadas parciales se pueden expresar también como:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x, y) - f(x,y)}{\delta x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\delta y \to 0} \frac{f(x, y + \delta y) - f(x,y)}{\delta y}$$

Ejemplos resueltos

1. $z = 2x^3 + 5x^2y + xy^2 + y^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 + 10xy + y^2 \qquad (y \text{ constante})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 5x^2 + 2xy + 3y^2 \qquad (x \text{ constante})$$

2. $z = \operatorname{sen} y + x^2 \cos y + e^{2x}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos y + 2e^{2x} \qquad (y \text{ constante})$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - x^2 \operatorname{sen} y \qquad (x \text{ constante})$$

18.3. Ilustración gráfica de las derivadas parciales

Hemos visto que una función con una variable independiente puede representarse mediante una curva plana. Sin embargo, si hay dos variables independientes, la función dependiente se puede representar mediante una superficie, esto es, se emplean coordenadas en tres dimensiones. Esto se puede ilustrar de la manera siguiente:

En la figura 18.1, sea XOY un plano con OX y OY como los ejes de coordenadas rectangulares. Los valores de dos variables x e y se pueden representar a lo largo de OX y OY, como hasta ahora. El plano en cuestión se llama plano xy.

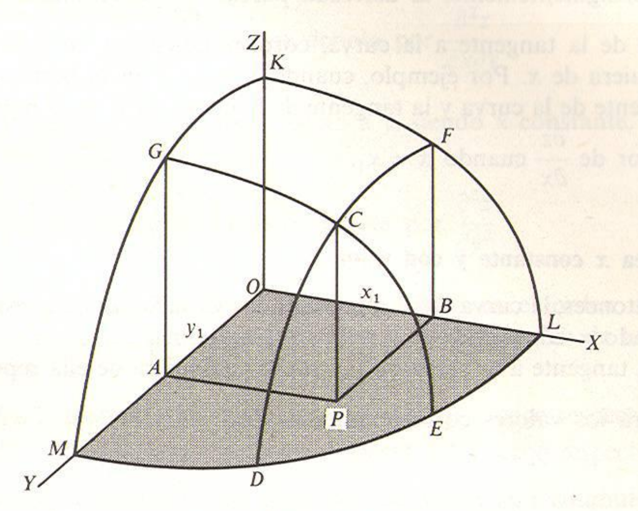


Figura 18.1

Trácese OZ perpendicular al plano desde O.

Por tanto, los planos XOZ e YOZ son perpendiculares al plano. XOZ es el plano (x, z) e YOZ es el plano (y, z).

Los valores de z correspondientes a los valores de x e y se señalan en el eje OZ.

Sea P un punto en el plano XOY con coordenadas (x_1, y_1).

Sobre OX señálese $OB = x_1$ y sobre OY, $OA = y_1$.

Entonces, P es la posición del punto en el plano XOY.

Desde P trácese PC paralela a OZ e igual a z_1, siendo z_1 el valor de z correspondiente a x_1 para x, e y_1 para y.

Entonces, C representa la posición del punto en el espacio cuando las coordenadas son (x_1, y_1, z_1).

Si se toman otros valores de x, con los correspondientes valores de z_1, obtenemos un conjunto de puntos similares a C, que caerán en la superficie.

1. Sea y constante y con valor y_1

GCE representa ahora las variaciones de z respecto a x cuando y es constante.

Consiguientemente, la derivada parcial $\frac{\partial z}{\partial x}$ representará la pendiente de la tangente a la curva, correspondiente a un valor dado cualquiera de x. Por ejemplo, cuando $x = x_1$, C es el punto correspondiente de la curva y la tangente de la curva GCE en C representa el valor de $\frac{\partial z}{\partial x}$ cuando $x = x_1$.

2. Sea x constante y con valor x_1

Entonces, la curva DCF representa las variaciones de z respecto a y, siendo x constante.

La tangente a la curva en un punto cualquiera de ella representa $\frac{\partial z}{\partial y}$ para los valores correspondientes de y y z.

18.4. Derivadas parciales superiores

Las derivadas parciales son ellas mismas funciones de las variables en cuestión, y así pueden tener sus derivadas parciales.

1. Por tanto, si se diferencia $\frac{\partial z}{\partial x}$ con respecto a x (siendo y constante), esto se indica como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ y se denota por } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

2. Puesto que también es una función de y, se puede diferenciar con respecto a y, siendo x constante. Así, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ que se denota por } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

3. Similarmente, $\frac{\partial z}{\partial y}$ se puede diferenciar respecto a x e y, de modo que cuando se diferencia respecto a x, siendo y constante, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ que se denota por } \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

4. Cuando se diferencia respecto a y, siendo x constante, tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ que se denota por } \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

Se observa que 2 y 3 son iguales, excepto en el orden de las diferenciales en los denominadores que indican el orden de la diferenciación.

— En 2 diferenciamos primero respecto a y y luego respecto a x.

— En 3 diferenciamos primero respecto a x y luego respecto a y.

Se puede demostrar que estas dos derivadas son conmutativas para un amplio grupo de funciones, esto es, que el orden en la diferenciación es irrelevante, lo que equivale a decir que el resultado es el mismo, o

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Similarmente, puede haber derivadas terceras y superiores.

18.5. Diferencial total

Cuando una función de una sola variable, como $y = f(x)$, se diferencia, el resultado se expresa como

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Si escribimos esta expresión en la forma

$$dy = f'(x)dx$$

la diferencial dy de la variable dependiente y se está expresando en función de la diferencial dx de la variable independiente x (véase el Ap. 4.3).

Procedemos ahora a hallar una expresión similar, cuando z es una función de las variables independientes x e y, esto es, buscamos una relación entre dz, dx y dy.

Sea

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

Auméntese x en δx, con lo que y recibirá un incremento δy y z el correspondiente incremento δz.

Entonces:

$$z + \delta z = f(x + \delta x, \ y + \delta y) \tag{2}$$

Restando (1) de (2):

$$\delta z = f(x + \delta x, \ y + \delta y) - f(x, y) \tag{A}$$

Si sólo varía y, y aumenta en δy, el resultado se puede expresar así:

$$f(x, \ y + \delta y) \tag{3}$$

Si sólo varía x, y aumenta en δx, el resultado se puede expresar así:

$$f(x + \delta x, \ y) \tag{4}$$

Si sumamos y restamos (3) a (A), tenemos:

$$\delta z = [f(x + \delta x, \ y + \delta y) - f(x, \ y + \delta y)] + [f(x, \ y + \delta y) - f(x, y)]$$

Entonces

$$\delta z = \frac{[f(x + \delta x, \ y + \delta y) - f(x, \ y + \delta y)]\delta x}{\delta x} + \\ + \frac{[f(x, \ y + \delta y) - f(x, y)]\delta y}{\delta y} \tag{B}$$

1. Considerando la primera parte de *B*

Si δx y δy tienden a cero, entonces:

$$\frac{f(x + \delta x,\ y + \delta y) - f(x,\ y + \delta y)}{\delta x}$$

En el límite es la derivada parcial de $f(x,\ y + \delta y)$, cuando sólo varía x e y permanece constante.

Pero en esta expresión δy se hace cero finalmente, y así adopta la forma:

$$\frac{f(x + \delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\delta x}$$

Por tanto, esta expresión es la derivada parcial de $f(x,\ y)$, cuando x varía e y es constante. Esto es,

$$\frac{\partial z}{\partial x}$$

2. Considerando la segunda parte de *B*

En el límite ésta representa la derivada parcial de $f(x,\ y)$ cuando sólo varía y,

$$\frac{\partial z}{\partial y}$$

También, en el límite, con la notación habitual, δx, δy y δz se convierten en las diferenciales dx, dy y dz.

Por tanto, sustituyendo en las partes correspondientes de (B), resulta:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \qquad (C)$$

Esta diferencial se llama *diferencial total de z*, siendo z una función de las variables x e y.

Se puede obtener una expresión similar cuando z es una función de tres variables.

18.6. Derivada total

Sean x e y, y consiguientemente z, funciones de una variable t.

En la anterior ecuación (B), divídase toda ella por δt.

Avanzando hasta el límite, de la misma forma que procedimos antes en (B), en el límite llegamos al resultado:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} \qquad (D)$$

Éste se llama *la derivada total* de z respecto a x e y, siendo estas variables dependientes de t.

Si y es una función de x, y la derivada total de dz se halla sustituyendo t por la x en la expresión anterior, tenemos:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

Esta expresión se puede obtener independientemente de la misma forma que la hemos obtenido antes.

18.7. Una ilustración geométrica

La siguiente ilustración geométrica probablemente ayudará a los lectores a caer en la cuenta del sentido e importancia de los anteriores resultados.

El área de un rectángulo es una función de dos variables, las longitudes de sus lados desiguales.

La figura 18.2 representa un rectángulo, de lados x e y.

Sea A el área del rectángulo. Entonces:

$$A = xy$$

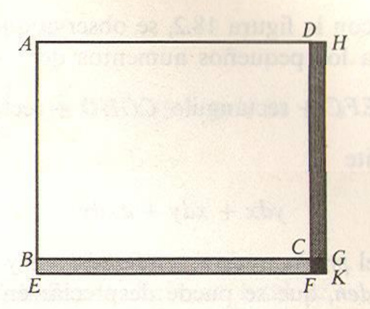


Figura 18.2

Sea x variable y supongamos que aumenta δx, mientras y permanece constante. Entonces:

$$A + \delta A = (x + \delta x)y$$

Restándole la expresión $A = xy$, tenemos:

$$\delta A = ydx$$

Esto es, el rectángulo $CGHD$.

La *velocidad de aumento de A* respecto a x, siendo y constante, es la derivada parcial. Es decir:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(xy) = y$$

Similarmente, si y es la variable, siendo x constante, δA = rectángulo $BEFC = x\delta y$, y la *velocidad de aumento:*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

Si varían x e y, entonces por la fórmula (C) el aumento *diferencial total*, en el límite, cuando δx y δy tienden a cero, es:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial A}{\partial y} dy$$

Sustituyendo los valores de las derivadas parciales, obtenemos

$$dA = ydx + xdy$$

Comparando con la figura 18.2, se observa que el aumento total del área, debido a los pequeños aumentos de x e y, es:

rectángulo $BEFC$ + rectángulo $CGHD$ + rectángulo $CFKG$

esto es, en el límite

$$ydx + xdy + dxdy$$

Pero $dxdy$ es el *producto de dos infinitésimos* y se llama *infinitésimo de segundo orden*, que se puede despreciar en comparación con ydx y xdy, infinitésimos de primer orden. Luego el aumento diferencial total de área es $ydx + xdy$.

Derivada total

Ahora supóngase que $y = 8m$, y que en un instante dado aumenta a una velocidad de 2 ms^{-1}.

Supóngase también que $x = 5m$, y que aumenta en el mismo instante a una velocidad de 3 ms^{-1}. ¿A qué velocidad aumenta A en el instante dado?

En este problema se introduce otra variable, el tiempo t, de modo que x e y, y consiguientemente A, varían con el tiempo.

La velocidad de aumento de A viene claramente dada por la derivada total, como se establece en la fórmula (D):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Sabemos que

$$\frac{\partial A}{\partial x} = y = 8$$

$$\frac{\partial A}{\partial y} = x = 5$$

$$\frac{dx}{dt} = 3$$

$$\frac{dy}{dt} = 2$$

Luego sustituyendo

$$\frac{dA}{dt} = (8 \times 3)+(5 \times 2) = 34 \ \mathrm{m^2 s^{-1}}$$

Ejemplo resuelto

Si $z = \mathrm{tg}^{-1}\, y/x$, hallar la derivada total dz.

Si $z = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Sustituyendo en la fórmula (D):

$$dz = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

18.8. Funciones implícitas

Las derivadas parciales le habrán recordado al lector el método de diferenciación de funciones implícitas descrito en el apartado 5.5.

La relación se hará clara si modificamos la fórmula (*C*) (ap. 18.5).
Sea $z = f(x, y)$ = una constante, por ejemplo, c.

Entonces, sus derivadas serán cero; luego la fórmula (*C*) se convierte en:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy = -\frac{\partial z}{\partial x} dx$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

Nótese que aunque la derivada total de z es cero, no fue éste el caso de las derivadas parciales.

Volviendo al apartado 5.5, se ve que los resultados son idénticos en principio.

Ejemplo resuelto

Si $z = 4x^3 - xy^2 + y^3 = 0$, hallar $\frac{dy}{dx}$.

De lo anterior deducimos:

$$\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\partial z}{\partial x} \div \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Pero

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy + 3y^2$$

Por tanto, sustituyendo

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12x^2 - y^2}{-2xy + 3y^2} = \frac{12x^2 - y^2}{2xy - 3y^2}$$

EJERCICIOS

Hallar las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, en las cuestiones 1-7.

1. $z = x^y$. **2.** $z = \cos(x^2 + y^2)$. **3.** $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

4. $z = x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + 2y^3$. **5.** $\text{sen}^{-1}\frac{x}{y}$.

6. $z = \text{tg}^{-1}\frac{x}{y}$. **7.** $z = \frac{ax}{y^2}$.

8. Si $z = \ln(e^x + e^y)$, demostrar que $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

Hallar las derivadas totales en las cuestiones 9-14.

9. $z = \frac{x}{y}$. **10.** $z = ax^2 + 2bxy + cy^2$. **11.** $z = \ln x^y$.

12. $z = x^2y + xy^3$. **13.** $z = e^{xy}$. **14.** $z = a^x e^y$.

15. Si $u = 2x^2 + 3y^2$, hallar du, cuando $x = 1$, $y = 3$, $dx = 0{,}01$ y $dy = 0{,}02$.

16. Si la ley de los gases perfectos es $V = \frac{kT}{p}$, siendo V el volumen,

P la presión y T la temperatura absoluta, hallar la relación entre dV, dT y dP.

17. Si $u = x^5y - \operatorname{sen} y$, hallar $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x dy}$, y demostrar que es igual a $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

18. ¿Cuál es en el sólido dado por $z = a^2 - x^2 - 2y^2$ la pendiente en un punto de la curva a lo largo de una sección donde y es constante?

19. El radio de la base de un cilindro recto aumenta en un instante dado a la velocidad de 1 ms^{-1}, mientras que la altura lo hace a 2 ms^{-1}. En el mismo instante, la altura es 10 m y el radio de la base, 5 m. ¿A qué velocidad aumenta el volumen?

19 Series. Teoremas de Taylor y Maclaurin

19.1. Series infinitas

Al estudiar álgebra, nos hemos familiarizado con ciertas series, como por ejemplo, la progresión geométrica, la progresión aritmética y la serie del binomio.

En el primero de estos casos, se ha considerado ya el importante problema de la suma de una serie cuando se aumente ilimitadamente el número de términos, esto es, cuando la serie se hace *infinita*.

Se pueden presentar dos casos:

1. Cuando la razón r es mayor que la unidad, al aumentar el número de términos, los términos aumentan individualmente y así también aumenta su suma. Si el número de términos se hace infinitamente grande, su suma se hace infinita, esto es, si S_n representa la suma de n términos, entonces, cuando $n \to \infty$, $S_n \to \infty$.
2. Si, por otra parte, la razón es menor que la unidad, los términos van disminuyendo continuamente y cuando $n \to \infty$, se demuestra fácilmente que S_n tiende a un límite finito.

19.2. Series convergentes y divergentes

En general, al estudiar cualquier tipo de series, un problema a investigar es si

1. S_n tiende a un límite finito cuando $n \to \infty$, o si
2. S_n tiende a infinito cuando $n \to \infty$.

Una serie del primer tipo se llama *convergente*, y si es del segundo tipo, *divergente*.

Existe también un tercer tipo llamado *oscilante*, pero no lo vamos a considerar en este capítulo.

Por razones teóricas y prácticas, es muy importante saber si una serie dada es convergente o divergente. Aunque hay un método universal de determinar el carácter de una serie, existen, sin embargo, varios procedimientos que se pueden aplicar para ciertas clases de series. Una consideración detallada de estos procedimientos cae fuera de los objetivos de este libro. Los estudiantes que deseen o necesiten estudiar esta importante materia deben consultar un texto de álgebra superior.

En el presente breve tratamiento de las series infinitas mediante el cálculo, se supondrá, sin demostrarlo, que las series consideradas son convergentes.

19.3. Teorema de Taylor

Según el teorema del binomio, la función $(x + a)^n$ puede ser desarrollada en una serie de potencias decrecientes de x y potencias crecientes de a. Otras muchas funciones se pueden desarrollar de igual forma, y para ello se han empleado diversos métodos. En este capítulo, sin embargo, se investiga un método general de desarrollo de funciones en series.

Brevemente, vamos a ver que $f(x + h)$ puede, en general, desarrollarse en una serie de potencias crecientes de h, si h es pequeño. Este desarrollo no es posible para todas las funciones y existen limitaciones en la aplicación del teorema que define la forma de desarrollo.

Comenzamos enunciando el teorema conocido como *teorema de Taylor*, y procederemos, a continuación, a su demostración.

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x) + \cdots$$

si h es pequeño.

Se aceptan los supuestos siguientes:

1. Cualquiera de las funciones que se van a considerar es susceptible de ser desarrollada en esta forma.

2. Bajo ciertas condiciones, en algunos casos la serie es convergente.
3. Existen todas las derivadas sucesivas, $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$,..., $f^n(x)$.

De acuerdo con 1, supondremos que $f(x + h)$ se puede desarrollar en potencias crecientes de h de la manera siguiente

$$f(x + h) = A_0 + A_1h + A_2h^2 + A_3h^3 + \cdots \qquad (B)$$

siendo los coeficientes A_0, A_1, A_2, ..., funciones de x, aunque no contienen h.

Puesto que esto se cumple para todos los valores de h, si tomamos $h = 0$, entonces, al sustituir este valor en (B), tenemos:

$$A_0 = f(x)$$

Puesto que la serie (B) es una identidad, se puede suponer que si ambos miembros se diferencian respecto a h, manteniendo x constante, el resultado también será otra identidad. Diferenciando, obtenemos:

$$f'(x + h) = A_1 + (A_2 \cdot 2h) + (A_3 \cdot 3h^2) + (A_4 \cdot 4h^3) + \cdots \qquad (1)$$

puesto que $f(x) = 0$, siendo x constante.

De igual modo:

$$f''(x + h) = 2A_2 + (3 \cdot 2A_3h) + (4 \cdot 3A_4h^2) + \cdots \qquad (2)$$
$$f'''(x + h) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2A_4h + \cdots \qquad (3)$$

y así sucesivamente, para derivadas superiores.

En todos estos casos, haciendo $h = 0$.

Entonces, tenemos:

$$f'(x) = A_1 \qquad (1)$$
$$f''(x) = 2 \cdot 1A_2 \qquad (2)$$
$$f'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1A_3 \qquad (3)$$
$$f^{iv}(x) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1A_4 \qquad (4)$$

Esto es:

$$A_1 = f'(x)$$

$$A_2 = \frac{f''(x)}{2!}$$

$$A_3 = \frac{f'''(x)}{3!}$$

$$A_n = \frac{f^n(x)}{n!}$$

y así sucesivamente.

Sustituyendo estos valores en (B), obtenemos el teorema de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^n(x) + \cdots$$

Es importante resaltar que la igualdad sólo es válida para valores de h pequeños $(h < 1)$.

19.4. Aplicación al teorema del binomio

Desarrollar $(x + h)^n$ por el teorema de Taylor.

Tenemos:

$$f(x + h) = (x + h)^n = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \cdots$$

Cuando $h = 0$:

$$f(x) = x^n$$
$$f'(x) = nx^{n-1}$$
$$f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$$
$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$$
$$\cdots\cdots$$

Sustituyendo en el desarrollo de Taylor:

$$(x+h)^n = x^n + hnx^{n-1} + \frac{h^2}{2!}n(n-1)x^{n-2} + \frac{h^3}{3!}n(n-1)(n-2)x^{n-3} + \cdots$$

que se puede reordenar así:

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}h^3 + \cdots$$

19.5. Teorema de Maclaurin (o teorema de Stirling)

Ésta es otra forma del teorema de Taylor, que se obtiene haciendo $x = 0$ y sustituyendo, por conveniencia, h por x, lo cual es posible, ya que el teorema de Taylor se cumple para todos los valores de x y valores pequeños de h.

Entonces, hagamos $x = 0$ y $h = x$ pequeño.

El teorema de Taylor se convierte en

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots \frac{x^n}{n!}f^n(0) \cdots$$

En esta forma, $f^n(0)$ significa que en la derivada enésima de $f(x)$, x es sustituido por 0.

Ejemplos resueltos

1. Desarrollar $\ln(1 + x)$.

Puesto que $f(x) = \ln(1 + x)$:

$$f(x) = \ln(1+x) \quad ; \qquad f(0) = \ln(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \qquad f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \quad ; \qquad f''(0) = -\frac{1}{1} = -1$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3} \quad ; \qquad f'''(0) = 1 \cdot 2$$

$$f^{iv}(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4} \quad ; \qquad f^{iv}(0) = -3!$$

....

$$f^n(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \quad ; \qquad f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$$

Sustituyendo estos valores en las series de Maclaurin, esto es

$$f(x) = \ln(1+x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots$$

tenemos:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}x^n + \cdots$$

Conviene recordar que la base empleada en todo el problema ha sido e. Consiguientemente, se puede utilizar esta serie para calcular logaritmos en esta base de números cercanos a 1. A partir de éstos se pueden obtener los logaritmos decimales o en cualquier otra base.

2. Desarrollar $\operatorname{sen} x$ en una serie de potencias de x.

$$f(x) = \operatorname{sen} x \quad ; \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad ; \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \quad ; \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x = \operatorname{sen}\left(x - \frac{3\pi}{2}\right) \quad ; \quad f'''(0) = -1$$

....

$$f^n(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \quad ; \qquad f^n(0) = \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}$$

Sustituyendo en la serie de Maclaurin, tenemos:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{x^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}}{n!}$$

En esta serie, x se mide en radianes.

Si hacemos $x = 1$, podemos calcular fácilmente el valor deseado, tomando suficientes términos de la serie. Se observará que los términos disminuyen más bien rápidamente, o lo que es lo mismo, que la serie converge rápidamente.

Se debe notar además que la serie sólo contiene potencias impares de x, esto es, es una *función impar*. La serie para $\cos x$ contendrá sólo potencias pares de x, esto es, es una *función par*.

3. Desarrollar e^x en una serie de potencias de x.

Tenemos

$$f(x) = e^x \quad ; \quad f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^x \quad ; \quad f'(0) = 1$$
$$f''(x) = e^x \quad ; \quad f''(0) = 1$$

Sustituyendo en la serie de Maclaurin, obtenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

(Compárese con el apartado 8.4.)

19.6. Desarrollo por diferenciación e integración de series conocidas

El método se puede ilustrar mediante el siguiente ejemplo:
Se sabe que

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Se puede demostrar que cuando una función se representa por una serie y la función y la serie se integran, los resultados son iguales:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \cdots$$

$$\operatorname{tg}^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Esta serie se conoce con el nombre de *serie de Gregory*. Es convergente y se puede utilizar para calcular el valor de π.
Así, en la serie, sea $x = 1$. Entonces,

$$\operatorname{tg}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$$

Sustituyendo en la serie de Gregory,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

A partir de ahí, tomando suficientes términos, se puede hallar el valor de π con la precisión que se desee. La serie, sin embargo, converge lentamente y, consiguientemente, se emplean en el cálculo de π otras series que convergen rápidamente.

EJERCICIOS

Desarrollar las siguientes funciones en potencias de x:

1. *a*) $\operatorname{sen}(a + x)$; *b*) $\cos(a + x)$. **2.** e^{e+h}.

3. $\operatorname{tg}^{-1}(x + h)$. **4.** $\ln(1 + \operatorname{sen} x)$. **5.** $\cos x$.

6. $\operatorname{tg} x$. **7.** $\ln(1 + e^x)$. **8.** a^x.

9. e^{-kx}. **10.** $e^{\operatorname{sen} x}$. **11.** $\sec x$.

12. $\ln \sec x$. **13.** $\operatorname{sen}^{-1} x$. **14.** $\ln(1 - x)$.

15. $\operatorname{Sh} x$. **16.** $e^x \operatorname{sen} x$. **17.** $\operatorname{Tgh} x$.

20 Ecuaciones diferenciales elementales

20.1. Significado de una ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es aquella ecuación que contiene una variable independiente, una variable dependiente y una o más derivadas de estas variables.

Estas ecuaciones son muy importantes en física, todo tipo de ingeniería y otras aplicaciones de las matemáticas. Aunque en este libro no se puede dar más que una breve introducción a lo que es una materia amplia, las formas elementales de ecuaciones diferenciales que manejamos en este capítulo serán de enorme valor para muchos estudiantes.

Ejemplos de ecuaciones diferenciales ya han aparecido en este libro, como por ejemplo, los ejercicios 49-54 del capítulo 10.

De nuevo, como se ilustra en el apartado 10.2, si

$$\frac{dy}{dx} = 2x \qquad (1)$$

o

$$dy = 2xdx \qquad (2)$$

obtenemos por integración la relación

$$y = x^2 + c \qquad (3)$$

(1) y (2) son ecuaciones diferenciales, y (3) es su solución. Así, una ecuación diferencial se resuelve cuando, por integración, se hallan las relaciones entre las dos variables x e y.

Este proceso implica la introducción de una constante indeterminada. Así, la solución (3) es la ecuación general o la relación entre x e y para toda la familia de curvas representada en la figura 10.1.

20.2. Formación de ecuaciones diferenciales

Las ecuaciones diferenciales se forman o pueden deducirse de muy diversas maneras. Por ejemplo, se demuestra en mecánica que si s es la distancia recorrida en un tiempo t por un cuerpo que se mueve con una aceleración uniforme a, entonces

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a \tag{1}$$

Integrando:

$$\frac{ds}{dt} = at + c_1 \tag{2}$$

E integrando otra vez:

$$s = \frac{1}{2}at^2 + c_1t + c_2 \tag{3}$$

De estas expresiones, (1) contiene una derivada segunda, (2) la primera derivada, mientras que (3) es la solución de (1) y (2).

Las ecuaciones diferenciales también se pueden formar por diferenciación directa. Así, sea

$$y = x^3 + 7x^2 + 3x + 7 \tag{a}$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 14x + 3 \tag{b}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x + 14 \tag{c}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6 \tag{d}$$

(a) se denomina la *primitiva* completa de (d).

20.3. Clases de ecuaciones diferenciales

a) Existen dos tipos principales de ecuaciones diferenciales:

1. *Ecuaciones diferenciales ordinarias*, que contienen sólo una variable independiente.
2. *Ecuaciones diferenciales parciales*, que contienen más de una variable independiente.

En este capítulo nos ocuparemos solamente del primer tipo.

b) *Orden.* Las ecuaciones diferenciales de ambos tipos se clasifican según la derivada más alta que contienen. Así, de las ecuaciones diferenciales (*b*), (*c*) y (*d*) del apartado 20.2:

b) es de *primer* orden, ya que sólo contiene la primera derivada;
c) es de *segundo* orden;
d) es de *tercer* orden.

c) *Grado.* El grado de una ecuación diferencial es el de la potencia más alta de la derivada mayor que contiene la ecuación después de que ésta se ha simplificado despejando radicales y fracciones.

Así, la ecuación $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + 3\frac{dy}{dx} = 0$ es de segundo orden y de tercer grado; $s = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ (Ap. 15.2) es de primer orden y segundo grado.

20.4. Soluciones de una ecuación diferencial

Una solución *completa* o *general* debe contener un número de constantes arbitrarias igual al orden de la ecuación. Así, en el apartado 20.2, (3) contiene dos constantes arbitrarias y es la solución de (1), una ecuación diferencial de segundo orden.

Las soluciones obtenidas asignando valores particulares a las constantes, como en el ejercicio 54 del capítulo 10, se llaman *soluciones particulares.*

Este capítulo se ocupará sólo de las ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado.

20.5. Ecuaciones diferenciales de primer orden y primer grado

Puesto que las soluciones de las ecuaciones diferenciales implican la integración, no se pueden, en consecuencia, formular reglas, como en la diferenciación, que se puedan aplicar a cualquier tipo de ecuación. Algunas ecuaciones, efectivamente, no se pueden resolver. Sin embargo, muchas de ellas, entre las que se incluyen numerosas ecuaciones de importancia práctica, se pueden clasificar en varios tipos, cuyas soluciones se pueden hallar por métodos establecidos. Vamos a considerar algunos de estos tipos.

1. Ecuaciones en las que falta una variable

Existen dos formas:

a) *Cuando falta* y

La forma general es:

$$dy = f(x)dx$$

y la solución es:

$$y = \int f(x)dx$$

Esto requiere la integración ordinaria para su resolución.

Ejemplo resuelto

Resolver la ecuación $dy = (x^4 + \operatorname{sen} x)dx$.

Entonces

$$y = \int (x^4 + \operatorname{sen} x)dx$$

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \cos x + c$$

b) *Cuando falta* x

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

o

$$dy = f(y)dx$$

Esto se puede escribir así:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

o

$$dx = \frac{dy}{f(y)}$$

de donde

$$\int dx = \int \frac{dy}{f(y)}$$

La solución se obtiene seguidamente por integración directa.

Ejemplo resuelto

Resolver la ecuación $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} y$.

Tenemos $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\operatorname{tg} y}$

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{tg} y}$$

$$\int dx = \int \frac{dy \cos y}{\operatorname{sen} y}$$

$$x = \ln \operatorname{sen} y + c$$

2. Ecuación diferencial de variables separables

Si es posible reagrupar los términos de la ecuación diferencial en dos grupos, cada uno conteniendo solamente una variable, se dice entonces que las variables son separables. Entonces, la ecuación adopta la forma

$$F(x)dx + f(y)dy = 0$$

en la cual $F(x)$ es una función sólo de x y $f(y)$ una función de y únicamente.

La solución general entonces es:

$$\int F(x)dx + \int f(y)dy = c$$

donde c es una constante arbitraria.

Ejemplos resueltos

1. Resolver la ecuación diferencial $xdy + ydx = 0$.

Para separar variables, dividir toda la ecuación por xy. Entonces:

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} + \int \frac{dx}{x} = 0$$

$$\ln y + \ln x = c$$

Si la constante c se escribe en forma de $\ln c$, entonces

$$\ln y + \ln x = \ln c$$

de donde $xy = c$.

El factor $1/xy$ utilizado para separar las variables se llama un *factor de integración.*

2. Resolver la ecuación $(1 + x)ydx + (1 - y)xdy = 0$.

Multiplicando todos los términos por $1/xy$, obtenemos:

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

o

$$\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = 0$$

$$\int\left(\frac{1}{x} + 1\right)dx + \int\left(\frac{1}{y} - 1\right)dy = c$$

$$\ln x + x + \ln y - y = c$$

o

$$\ln xy + (x - y) = c$$

3. Ecuaciones diferenciales lineales

Una ecuación de la forma

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

siendo P y Q constantes, o funciones de x únicamente, se llama una *ecuación diferencial lineal*, ya que y y sus derivadas son de primer grado.

Se ha descubiero que si una ecuación de esta clase se multiplica en todos sus términos por el *factor de integración* $e^{\int Pdx}$ se obtiene una ecuación que puede ser resuelta.

Al multiplicar por este factor, la ecuación se convierte en:

$$e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx} + Py\right) = Qe^{\int Pdx}$$

Se puede ver ahora que la integral de la parte izquierda es $ye^{\int Pdx}$. Esto es evidente si diferenciamos $ye^{\int Pdx}$. Por tanto, la solución de la ecuación es:

$$ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx \qquad (A)$$

El procedimiento para resolver este tipo de ecuación diferencial consiste en comenzar hallando la integrar $\int Pdx$ y luego sustituyendo en (A). Ilustramos el método más claramente con algunos ejemplos.

Ejemplos resueltos

1. Resolver la ecuación $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 1$.

Transformando esta expresión en la forma general

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

obtenemos

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 - x^2}y = \frac{1}{1 - x^2}$$

Puesto que el factor de integración es $e^{\int Pdx}$, procedemos primero a hallar $\int Pdx$ en este caso, teniendo en cuenta que

$$P = \frac{-x}{1 - x^2},\ Q = \frac{1}{1 - x^2}$$

Comparando con la ecuación de antes, tenemos:

$$\int P dx = -\int \frac{x}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(1 - x^2) = \ln\sqrt{1-x^2}$$

Entonces, el factor de integración es

$$e^{\ln\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$$

Utilizando la forma (A) del punto 3, tenemos:

$$y\sqrt{1-x^2} = \int \frac{1}{1-x^2} \times \sqrt{1-x^2} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} x + c$$

Luego la solución es:

$$y\sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}^{-1} x + c$$

2. Resolver la ecuación $\cos x \dfrac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 1$.

Dividiendo por $\cos x$:

$$\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = \sec x$$

Comparando con la ecuación tipo (ejemplo 1):

$$P = \operatorname{tg} x$$

Entonces:

$$\int P dx = \int \operatorname{tg} x dx = \ln \sec x$$

$$e^{\int P dx} = e^{\ln \sec x} = \sec x$$

Utilizando la fórmula (A) y sustituyendo:

$$y \sec x = \int \sec x \sec x dx = \int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x + c$$

Por tanto, la solución es:

$$y = \cos x \operatorname{tg} x + c \cos x$$

o

$$y = \operatorname{sen} x + c \cos x$$

3. Resolver la ecuación $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + 2x^2$.

Comparando con la ecuación tipo (ejemplo 1):

$$P = 2x \quad ; \quad Q = 1 + 2x^2$$

Entonces:

$$\int P dx = \int 2x dx = x^2$$

Por tanto, el factor de integración es e^{x^2}, luego utilizando la fórmula (A) y sustituyendo:

$$ye^{x^2} = \int (1 + 2x^2) e^{x^2} dx = \int (e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2}) dx = xe^{x^2} + c$$

La solución es:

$$ye^{x^2} = xe^{x^2} + c$$

o

$$y = x + ce^{-x^2}$$

4. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Estas ecuaciones son de la forma

$$P + Q\frac{dy}{dx} = 0$$

siendo P y Q funciones homogéneas del mismo grado en x e y.

Entonces, P/Q es una función de y/x.

Estas ecuaciones pueden resolverse mediante la sustitución

$$\frac{y}{x} = v \quad \text{o} \quad y = vx$$

Así, las dos variables x y v son separables y la ecuación se puede resolver como antes.

Cuando se halla la solución, sustitúyase mediante estas variables v por y/x y así se alcanza la solución final.

Ejemplos resueltos

1. Resolver la ecuación diferencial $(x + y) + x\dfrac{dy}{dx} = 0$.

En este ejemplo, P y Q, esto es, $x + y$ y x, son funciones de primer grado de x e y.

Sea

$$\frac{y}{x} = v \quad \text{o} \quad y = vx$$

Entonces:

$$dy = vdx + xdv \qquad \text{(derivada de un producto)}$$

Sustituyendo en la ecuación de arriba:

$$(x + vx) + x\frac{vdx + xdv}{dx} = 0$$

$$(x + vx)dx + x(vdx + xdv) = 0$$

y

$$xdx + 2vxdx + x^2dv = 0$$

Separando las variables:

$$(1 + 2v)dx + xdv = 0$$

$$\frac{dv}{1 + 2v} + \frac{dx}{x} = 0$$

Integrando:

$$\frac{1}{2}\ln(1 + 2v) + \ln x = c_1$$

y

$$\ln(1 + 2v) + 2\ln x = c_2$$

$$x^2(1 + 2v) = c$$

Sustituyendo:

$$x^2\left(1 + 2\frac{y}{x}\right) = c$$

Luego la solución es:

$$x^2 + 2xy = c$$

2. Resolver la ecuación $(x^2 - y^2)dy = 2xydx$.

Hágase:

$$y = vx$$

Entonces:

$$dy = vdx + xdv$$

Sustituyendo:

$$(x^2 - v^2x^2)(vdx + xdv) = 2vx^2dx$$

Dividiendo por x^2:

$$(1 - v^2)(vdx + xdv) = 2vdx$$

De donde:

$$(1 - v^2)xdv = v(1 + v^2)dx$$

Separando variables:

$$\frac{1 - v^2}{v(1 + v^2)}dv = \frac{dx}{x}$$

Descomponiendo en fracciones parciales:

$$\left(\frac{1}{v} - \frac{2v}{1 + v^2}\right)dv = \frac{dx}{x}$$

Integrando:

$$\ln v - \ln(1 + v^2) = \ln x + c_1$$

$$\ln\frac{v}{1 + v^2} = \ln x + \ln c$$

$$\frac{v}{1 + v^2} = cx$$

y sustituyendo v por y/x

$$\frac{\frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} = cx$$

De donde:

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = cx$$

Y la solución es:

$$x^2 + y^2 = cy$$

5. Ecuaciones diferenciales exactas

La ecuación

$$Mdx + Ndy = 0$$

se llama *ecuación diferencial exacta*, cuando se forma a partir de su función primitiva completa por simple diferenciación.

Así, si la función primitiva completa es

$$x^3 + 3x^2y + y^3 = c \qquad (A)$$

entonces, al diferenciar tenemos:

$$(3x^2 + 6xy)dx + (3x^2 + 3y^2)dy = 0 \qquad \text{(Ap. 18.8.)}$$

Ésta es una ecuación diferencial exacta. Por consiguiente:

$(3x^2 + 6xy)$ es la derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, y

$(3x^2 + 3y^2)$ es la derivada parcial $\dfrac{\partial u}{\partial y}$

La primera se obtiene diferenciando (A) respecto a x *variable*, siendo y *constante*. La segunda, diferenciando (A) respecto a y *variable*, siendo x *constante*.

En general, el resultado tiene la forma

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0 \qquad \text{(Ap. 18.8.)}$$

Comparando con la forma

$$Mdx + Ndy = 0$$

es evidente que

$$M = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$N = \frac{\partial u}{\partial y}$$

20.6. Prueba para una ecuación diferencial exacta

En el apartado 18.4 se demostró que si $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ son las derivadas primeras de una función, las derivadas segundas son

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Estas derivadas se denotan por $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ y $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

También se indicó que estas derivadas eran iguales, para un gran número de funciones.

Consiguientemente, si la ecuación

$$Mdx + Ndy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta

$$\frac{\partial}{\partial y}(M) = \frac{\partial}{\partial x}(N)$$

entonces, si la función M se diferencia suponiendo que y es variable y x constante, y la función N se diferencia respecto a x variable e y constante, *los resultados son iguales.*

Así, en el ejemplo anterior

$$(3x^2 + 6xy)dx + (3x^2 + 3y^2)dy = 0$$

tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + 6xy) = 6x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + 3y^2) = 6x$$

De donde se deduce que la ecuación es exacta.

20.7. Resolución de una ecuación diferencial exacta

La integral $\int M dx$, esto es, M, cuando se integra suponiendo que x es variable e y constante, contendrá los términos en Ndy que contienen x. De ahí se sigue la regla siguiente:

1. *Intégrese* $\int M dx$, *suponiendo* y *constante.*
2. *Intégrese* $\int N dy$, *suponiendo* x *constante.*

Súmense los resultados, pero los términos comunes a ambas escríbanse sólo una vez.

Así, en el ejemplo anterior:

$$\int (3x^2 + 6xy)dx = x^3 + 3x^2y$$

$$\int (3x^2 + 3y^2)dy = 3x^2y + y^3$$

Puesto que $3x^2y$ aparece en las dos integraciones, se escribe sólo una vez. Por tanto, la solución es

$$x^3 + 3x^2y + y^3 = C$$

20.8. Factores de integración

Las ecuaciones diferenciales que no son exactas, generalmente se pueden hacer exactas multiplicando todos sus términos por una función adecuada de x e y.

Este factor es un factor de integración (Ap. 20.5, ejemplos) y representa factores comunes que se han eliminado durante el proceso mediante el cual la ecuación se ha obtenido a partir de su ecuación primitiva. Este factor no siempre es fácilmente obtenible. En algunos casos se puede hallar por simple inspección; a veces, por el método del ensayo y error; en otros, existen reglas para obtenerlo. En este capítulo nos limitaremos sólo a los casos más sencillos.

Ejemplos resueltos

1. Resolver la ecuación diferencial $(x + y)dx + (x + 3y)dy = 0$.

Aplicando la prueba del apartado 20.6, la derivada segunda en los dos casos es 1, luego la ecuación diferencial es exacta.

Aplicando la regla del apartado 20.7:

$$\int (x + y)dx = \frac{1}{2}x^2 + xy$$

$$\int (x + 3y)dy = xy + \frac{3}{2}y^2$$

Luego la solución es:

$$\frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{3}{2}y^2 = c_1$$

o

$$x^2 + 2xy + 3y^2 = c$$

2. Resolver la ecuación diferencial $(6x^2 - 10xy + 3y^2)dx + (-5x^2 + 6xy - 3y^2)dy = 0$.

Prueba:

$$\frac{\partial}{\partial y}(6x^2 - 10xy + 3y^2) = -10x + 6y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(-5x^2 + 6xy - 3y^2) = -10x + 6y$$

Por tanto, la ecuación diferencial es exacta.
Resolviendo por el método del apartado 20.7.

$$\int(6x^2 - 10xy + 3y^2)dx = 2x^3 - 5x^2y + 3xy^2$$

$$\int(-5x^2 + 6xy - 3y^2)dy = -5x^2y + 3xy^2 - y^3$$

Escribiendo los términos comunes $3xy^2$ y $-5x^2y$ sólo una vez, la solución es

$$2x^3 - 5x^2y + 3xy^2 - y^3 = c$$

3. Resolver la ecuación diferencial $2ydx + xdy = 0$.

Aplicando la prueba, se ve que ésta no es una ecuación diferencial exacta.
Multiplicándola por el factor de integración $1/(xy)$, tenemos:

$$\frac{2}{x}dx + \frac{1}{y}dy = 0$$

Ésta es una ecuación diferencial exacta.

Resolviendo:

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \ln x = \ln x^2$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln y$$

Por tanto, la solución es:

$$\ln x^2 + \ln y = c_1$$

o

$$x^2 y = \ln c_1$$

o

$$x^2 y = c$$

EJERCICIOS

Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes:

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{k}{x^2} = 0.$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{a}.$ **3.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}.$

4. $(1 + y)dx - (1 - x)dy = 0.$ **5.** $(x + 1)dy - ydx = 0.$

6. $\operatorname{sen} x \cos y dx = \operatorname{sen} y \cos x dy.$

7. $(y^2 - x^2)dy + 2xydx = 0.$ **8.** $xy\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 1}{x^2 + 1}.$

9. $2ydx = x(y - 1)dy.$ **10.** $y^2 + \operatorname{sen} 2x\dfrac{dy}{dx} = 1.$

11. $\dfrac{1+y^2}{(1+x^2)xy}=\dfrac{dy}{dx}.$ **12.** $\dfrac{dy}{dx}=x^2y.$

13. $x\sqrt{y^2-1}\,dx-y\sqrt{x^2-1}\,dy=0.$

14. $\dfrac{1+x^2}{1+y}=xy\dfrac{dy}{dx}.$ **15.** $\dfrac{dy}{dx}=2xy.$

16. La pendiente de una familia de curvas en el punto (x, y) es $-y/x$. ¿Cuál es la ecuación de la familia?

17. $\dfrac{dy}{dx}-2xy=2x.$ **18.** $x\dfrac{dy}{dx}+x+y=0.$

19. $\dfrac{dy}{dx}=y-x.$ **20.** $\dfrac{dy}{dx}+xy=x.$

21. $\dfrac{dy}{dx}+ay=e^x.$ **22.** $\dfrac{dy}{dx}+y\operatorname{tg}x=1.$

23. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{ay}{x}=\dfrac{x+1}{x}.$ **24.** $\operatorname{tg}x\dfrac{dy}{dx}=1+y.$

25. $e^xdy=(1-e^xy)dx.$ **26.** $xdy-aydx=(x+1)dx.$

27. $\cos^2x\dfrac{dy}{dx}+y=\operatorname{tg}x.$

28. $x^2\dfrac{dy}{dx}+xy+1=0.$

29. $(x+y)dx+xdy=0.$ **30.** $(x+y)dx-xdy=0.$

31. $(x+y)dx+(y-x)dy=0.$ **32.** $(x-2y)dx+ydy=0.$

33. $(x^2+y^2)=2xy\dfrac{dy}{dx}.$ **34.** $y^2-x^2\dfrac{dy}{dx}=0.$

35. $(y^2 - 2xy)dx = (x^2 - 2xy)dy$.

36. $x^2dy + y^2dx + xydy = 0$.

37. $y^2dx + (x^2 - xy)dy = 0$.

38. $y^2dx + (xy + x^2)dy = 0$.

39. $(x - 2y)dy + xdx = 0$.

40. $(x + y)dx + (x + 4y)dy = 0$.

41. $(2x + y + 1)dx + (x + 2y - 1)dy = 0$.

42. $2xdy + ydy = 3x^2dx$.

43. $(x^2 - y)dx + (x - y^2)dy = 0$.

44. $(2xy - y^2 + 2x)dx + (x^2 - 2xy + 2y)dy = 0$.

45. $ydx - (x + y^2)dy = 0$ (factor de integración $1/y^2$).

46. $xdy - ydx = x^2dx$ (factor de integración $1/x^2$).

47. $x(1 - y^3)dy + ydx = 0$.

48. $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$.

49. $(y^2 - x^2)dy + 2xydx = 0$.

50. $xdy + ydx = xy^3dy$.

21 Introducción a métodos numéricos utilizando una calculadora u ordenador

En los dos últimos capítulos vamos a examinar el posible uso de una calculadora u ordenador personal para efectuar los cálculos numéricos de los problemas explicados previamente. En este capítulo se incluye el cálculo de pendientes y de máximos y mínimos. En el siguiente, se verá la integración numérica y una introducción a la resolución numérica de las ecuaciones diferenciales.

Antes de examinar las aplicaciones propiamente dichas, se dan una breves instrucciones sobre el uso de una calculadora y de un ordenador personal sencillo. Con ello no se pretende ser exhaustivos, sino dar información suficiente que permita afrontar el trabajo subsiguiente. Si fuera necesario un conocimiento más completo del manejo de la calculadora se puede consultar el volumen de esta colección *Trigonometría.*

Se supone que para estos dos últimos capítulos se puede fácilmente tener acceso a una calculadora científica y un ordenador personal que puede funcionar con lenguaje BASIC.

21.1. Uso de la calculadora

Aunque idealmente se requiere una calculadora científica, esto es, una calculadora con teclas con las funciones sen, cos y tg, es posible hacer la mayor parte del trabajo incluso con la calculadora más sencilla. Sin embargo, hay que tener en cuenta que dos calculadoras diferentes pueden dar resultados diferentes para el mismo cálculo.

Hay dos tipos de calculadoras, las que usan lógica *aritmética* y las que utilizan lógica *algebraica.*

Ejemplos resueltos

1. $2 + 3 \times 4$ puede ser igual a 20 o a 14, según las reglas que se sigan para decidir el orden de la suma y de la multiplicación.

Si se realiza la suma tal como está escrita, se sumaría primero $2 + 3$ para dar 5 y luego se multiplicaría este resultado por 4, para dar 20 de resultado final. Esto se conoce como lógica ordinaria o *lógica aritmética.*

La mayoría de las calculadoras están diseñadas para utilizar *lógica algebraica.* Si no se utilizan paréntesis, se da un orden definido de prioridad a las distintas operaciones. En primer lugar, se efectúan las operaciones con potencias, luego las divisiones seguidas de multiplicaciones, sustracciones, y finalmente las sumas. Así, en el ejemplo anterior se efectuaría primero 3×4, que da 12, y luego se sumaría 2, para dar 14 como resultado final.

En lo que sigue, se supone que la calculadora utiliza *lógica algebraica.*

En la mayoría de las calculadoras pueden aparecer hasta 8 cifras, aunque algunas de las más caras pueden llegar hasta 10 o incluso 12. Sin embargo, los cálculos reales se pueden efectuar utilizando un número de cifras superior a éstas.

2. El resultado de 2/3 puede aparecer como 0.6666666 ó 0.6666667.

En el primer caso, aunque 2/3 es 0.666666666666..., la calculadora simplemente ha contado el resultado utilizando sólo las 8 primeras cifras. En el segundo caso, la calculadora ha examinado la novena cifra y al ser ésta 5 o superior a 5, ha redondeado el octavo 6 a 7.

La mayoría de las calculadoras científicas redondean las cifras, mientras que muchas de las más normales ignoran las cifras que no pueden aparecer.

En muchas calculadoras científicas los números muy pequeños y muy grandes se muestran utilizando la forma estándar o la notación científica. En estos casos, un número como 0.000237, que en forma estándar se puede escribir 2.37×10^{-4}, aparece de hecho en el visor como 2.37 -4.

21.2 Uso de la calculadora para cálculos simples

Para cálculos aritméticos directos, simplemente tecléese el cálculo tal como aparece escrito, recordando que es necesario pulsar la tecla de [=] para ver el resultado.

Ejemplos resueltos

1. Hallar $3 + 4$, $3 - 4$, 3×4 y $3/4$.

Tecléese $3 + 4 =$, y aparecerá 7.
Tecléese $3 - 4 =$, y aparecerá -1 ó 1.
Tecléese $3 \times 4 =$, y aparecerá 12.
Tecléese $3/4 =$, y aparecerá 0.75.

Nota. Si se acaba la secuencia de tecleo con el signo [=], no es necesario borrar el último resultado antes de comenzar el cálculo siguiente.

Muchas calculadoras tienen teclas para ON y OFF. La tecla ON con frecuencia tiene incorporada una función de borrado que se indica como ON/C. Cuando, además, existe una tecla CE para borrar la última entrada, la tecla ON/C ordinariamente borra toda la máquina, incluyendo las memorias. Si no existe tecla CE, la tecla ON/C sólo actúa borrando la entrada del último tecleo. En algunas calculadoras estas dos teclas se denominan AC para borrarlo todo y C para borrar la última entrada.

La tecla CE se utiliza para subsanar un error en el tecleo de un número. Por ejemplo, si se teclea $34 + 21$ cuando lo que se ha querido en realidad hacer es $34 + 12$, habrá que teclear CE para eliminar 21 antes de volver a teclear 12.

2. Hallar $34 + 12$.

Conectar la calculadora tecleando ON/C o AC. El 0 debe aparecer en el visor.
Teclear $34 + 21$; teclear ahora CE para eliminar 21.
Teclear $12 =$, y aparecerá el resultado correcto, 46.

Nota. Si se pulsa la tecla de operación errónea, se puede corregir la operación simplemente volviendo a teclear inmediatamente la

tecla correcta. Pero hay que tener cuidado con algunas calculadoras que suelen efectuar las dos operaciones marcadas.

3. Hallar 41×12.

Tecléese $41 + \times 12 =$, y se obtendrá 492.

Nota. Si se presiona la tecla CE para eliminar el signo + incorrecto, es probable que también se elimine el 41.

Siempre es buena idea, antes de cualquier cálculo, pulsar la tecla ON/C que lo borra todo y acabar un cálculo o una parte de un cálculo apretando la tecla [=].

En una calculadora, hay que distinguir entre la operación de sustracción y el uso del signo − para indicar un número negativo. Este último se introduce ordinariamente mediante una tecla de cambio de signo o +/−.

Cuando se desea introducir un número negativo, primero hay que teclear el número y luego apretar la tecla +/− para hacerlo negativo.

4. Hallar -3×-4.

Tecléese 3 +/− × 4 +/− =, y se debe obtener 12.

Cálculos con paréntesis

Muchas calculadoras científicas permiten el uso directo de paréntesis. Si se dispone de esta ventaja, la mayoría de los cálculos se pueden introducir en la calculadora tal como están escritos.

5. Hallar el área del trapecio cuyos lados paralelos tienen una longitud de 7,3 y 12,2 cm y una distancia perpendicular entre dichos lados de 3,2 cm.

El área del trapecio viene dada por la fórmula

$$\left(\frac{(a + b)h}{2}\right)$$

En este ejemplo $a = 7{,}3$, $b = 12{,}2$ y $h = 3{,}2$. Así, el área será:

$$0{,}5 \times (7{,}3 + 12{,}2) \times 3{,}2 \text{ cm}^2 \text{ o } 31{,}2 \text{ cm}^2.$$

Tecléese 0.5 ×(7.3 + 12.2)× 3.2 =, y debe obtenerse 31.2.

6. Hallar la pendiente de la recta que pasa por los puntos (12,7) y (20,73).

La pendiente de esta recta es (73 − 17)/(20 − 12).
Tecléese (73 − 17)/(20 − 12)=, y debe obtenerse 7.
Si en la calculadora que se usa no existen paréntesis, habrá entonces que efectuar las operaciones de cada paréntesis por separado, anotando cada vez el resultado, y luego combinar los dos resultados obtenidos por separado, o habrá que usar la memoria de la calculadora.

21.3. Uso de la memoria de la calculadora

La mayoría de las calculadoras, incluidas las más sencillas, tienen algún tipo de memoria o de almacenamiento de datos. Estos tipos varían según las calculadoras. En algunas, se trata simplemente de un almacenamiento (STO o Min) que se puede utilizar para mantener o recordar (RCL o MR) un número, o para actualizar un resultado con un número diferente. En otras es posible sumar (M+) o restar (M−) otros números y luego reclamar el resultado. Algunas calculadoras tienen más de un almacén de memoria que les permite almacenar simultáneamente varios números.

Para introducir un número en la memoria hay que teclear simplemente el número seguido de tecleo en STO o M+. Con STO el nuevo número reemplaza al número antiguo, mientras que con M+ el nuevo número se suma al número que ya tiene la memoria.

Para usar M+ es, por tanto, importante saber si la memoria estaba originalmente vacía o no. Esto puede realizarse utilizando la tecla ON/C, si esta tecla borra la memoria, o utilizar la tecla CM o la tecla R. CM dos veces. La R de la tecla R. CM reclama el número a la memoria y tecleando una segunda vez lo borra de la memoria.

Cuando una calculadora tiene las dos teclas, una M+ y una Min

(o STO), pero carece de un mecanismo de borrar la memoria, el tecleo de 0 seguido de Min produce el mismo efecto que el borrado de memoria.

Ejemplos resueltos

1. Hallar $\frac{4}{5x + 3}$, siendo $x = 1{,}5$.

Primero, asegúrese que la memoria está vacía. Compruébese tecleando MR (o RCL), lo cual debe dar 0.

Tecléese 5 × 1.5 + 3 =, seguido de M+ (o STO).

Tecléese 4/MR (o RCL)=, y el resultado que aparece es 0,3809524.

La ventaja de la utilización de la memoria con números largos, respecto a escribir los resultados intermedios, es que es menos probable cometer errores debidos a la transcripción de los números.

2.*a*) Hallar $ay_1 + 4ay_2 + ay_3$, siendo $a = 2{,}1$, $y_1 = 8$, $y_2 = 27$ e $y_3 = 64$.

Bórrese la memoria.
Tecléese 2.1 + 8 =, y luego M+.
4 × 2.1 × 27 =, y luego M+.
2.1 × 64 =, y luego M+.
Seguidamente, apriétese MR y se obtendrá el resultado 378.

Nota. Es importante no olvidarse de apretar la tecla [=] después de cada cálculo por separado, pues de lo contrario sólo se añadirá a la memoria la segunda cifra en cada caso.

Cuando la calculadora sólo tiene una tecla de almacenamiento (STO), el tecleo del ejemplo 2*a* se hace algo más complicado, como vamos a explicar en el ejemplo 2*b*, a continuación.

2.*b*) Hallar $ay_1 + 4ay_2 + ay_3$, siendo $a = 2{,}1$, $y_1 = 8$, $y_2 = 27$ e $y_3 = 64$.

Bórrese la memoria.
Tecléese 2.1 + 8 =, y luego STO.
Tecléese 4 × 2.1 × 27 + RCL =, y luego STO.
Tecléese 2.1 × 64 + RCL =, y se obtiene 378 como antes.

La utilización eficiente de la memoria de una calculadora requiere mucha práctica. Las instrucciones que acompañan a las calculadoras ordinariamente contienen muchos ejemplos e ilustran diversas posibilidades.

21.4. Uso de otras funciones matemáticas

Incluso las más simples calculadoras tienen al menos una tecla de raíz cuadrada ($\sqrt{\ }$). Las calculadoras científicas también tienen una tecla de inversos ($1/x$), y teclas y^x o x^y para hallar potencias y raíces de números, teclas para las funciones trigonométricas de seno (SIN), coseno (COS) y tangente (TAN) y sus inversos, así como teclas para logaritmos neperianos (LN) y logaritmos decimales (LOG).

Se dan a continuación ejemplos de cómo se utilizan algunas de estas teclas. Si se examina atentamente el teclado de una calculadora, se encontrarán algunos de los símbolos matemáticos mencionados sobre las mismas teclas, algunos otros sobre las teclas en otro color, y algunos directamente encima de las teclas. Cuando el símbolo es único sobre una tecla, para usarlo basta sencillamente con pulsar dicha tecla.

Ejemplos resueltos

1. Hallar la raíz cuadrada de 625, cuando $\sqrt{\ }$ es el único símbolo sobre la tecla correspondiente.

Teclear 625$\sqrt{\ }$, lo que nos da directamente el resultado, 25.

Para utilizar las funciones trigonométricas seno (SIN), coseno (COS) y tangente (TAN), se teclea el ángulo, en grados o en radianes seguida de la función, y se determina el número correspondiente a la función del ángulo.

2. Hallar sen 30°.

Asegurarse de que la calculadora está en el modo *(degree)* (esto es, que no está en modo *radian* o *grad*).

Teclear 30 y pulsar la tecla SIN.

En el visor aparecerá 0.5.

Nota. El seno de un ángulo debe estar entre -1 y $+1$.

3. Hallar $\cos 2^c$.

Ahora póngase la calculadora en modo *radian* (esto es, no en modo *degree* ni *grad*).

Teclear 2 y pulsar la tecla COS.

En el visor aparecerá -0.4161468.

Nota. El coseno de un ángulo debe estar entre -1 y $+1$.

4. Hallar $\text{tg}\, 230°$.

Ahora vuélvase la calculadora al modo *degree*.

Teclear 230 y pulsar la tecla TAN.

En el visor aparecerá -1.1917536.

Nota. La tangente de un ángulo puede tomar un valor cualquiera.

Cuando sobre una misma tecla hay dos símbolos, o los dos símbolos están encima de la tecla, o uno sobre el otro encima de la tecla, se comprobará que la calculadora tiene una tecla especial (normalmente en la esquina superior izquierda) llamada la tecla INV o 2ND FN. Al apretar esta tecla antes de la tecla deseada, se activará la segunda función.

5. Hallar el inverso de 25, si $1/x$ es la segunda función.

Teclear 25 INV $1/x$ y aparecerá el resultado buscado, 0.04.

6. Hallar 2^5 en una calculadora con una tecla y^x (o x^y).

Teclear 2 y^x 5 =, lo que nos da el resultado 32.

Para una explicación completa de todas las teclas de una determinada calculadora, es necesario consultar el manual del fabricante que se suministra con la máquina.

21.5. Funciones y sus inversos

Si la calculadora de que se dispone tiene una tecla INV (o 2ND FN), entonces muchas de las teclas tendrán dos usos diferentes. El primero se obtiene simplemente pulsando la tecla particular, mientras que el segundo se obtiene pulsando primero la tecla INV (o

2ND FN) y pulsando a continuación la tecla deseada. Con frecuencia, aunque no siempre, las dos funciones están relacionadas. Por ejemplo, si al pulsar la tecla se obtiene la raíz cuadrada del número que aparece en el visor, entonces pulsando INV primero y luego la tecla de la raíz cuadrada, es probable que se obtenga el cuadrado del mismo número. Elevar al cuadrado es la operación inversa de hallar una raíz cuadrada.

Ejemplos resueltos

1. Hallar $\sqrt{16}$ y luego demostrar que 4^2 es 16.

Teclear 16 y pulsar la tecla $\sqrt{\ }$. El resultado debe ser 4.
Ahora, pulsar la tecla INV y a continuación la tecla $\sqrt{\ }$ otra vez.
En el visor debe aparecer otra vez 16.
Ahora, pulsar la tecla INV y la tecla $\sqrt{\ }$ otra vez.
En el visor debe aparecer ahora 256 (esto es, el cuadrado de 16).

2. Hallar el inverso de sen 0,5, que también se puede escribir $\text{sen}^{-1}\,0{,}5$.

Asegurarse de que la calculadora está en modo *degree* (esto es, no está en el modo *radian* o *grad*).
Teclear 0.5, pulsar primero la tecla INV y luego la tecla SIN.
En el visor debe aparecer 30.

Nota. Este número es 30°.

3. Hallar el inverso de cos 0,5, que también se puede escribir $\cos^{-1}\,0{,}5$.

Esta vez, poner la calculadora en el modo *radian*.
Teclear 0.5, pulsar primero la tecla INV y luego la tecla COS.
Debe aparecer el resultado 1.0471976.

Nota. 1,0471976 radianes son 60°.

4. Hallar ln 4 y luego demostrar que $e^{1{,}3862944}$ es 4.

Teclear 4 y pulsar la tecla LN.
El resultado debe ser 1.3862944.
Ahora, pulsar la tecla INV seguida de la tecla LN otra vez.
En el visor debe ahora aparecer 4.

En algunas teclas las dos funciones no están relacionadas. Por ejemplo, al pulsar una tecla particular podría obtenerse $1/x$, mientras que al apretar INV y luego la misma tecla podría obtenerse $x!$ (factorial de x).

21.6. Cálculo de pendientes

Anteriormente, hemos visto cómo hallar la pendiente de una cuerda PQ en el gráfico de $y = f(x)$, calculando la expresión $[f(x + h) - f(x)]/h$.

También vimos que, cuando el valor de h se hace muy pequeño y tiende a 0, la pendiente de la cuerda se aproxima mucho a la pendiente de la tangente en P (Fig. 21.1).

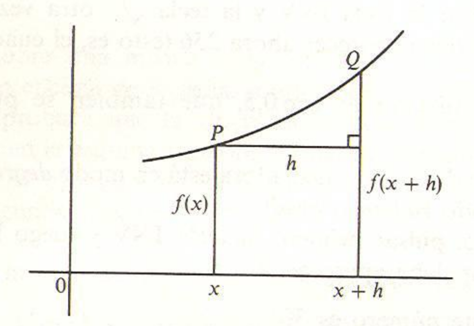


Figura 21.1.

Ejemplo resuelto

Hallar una aproximación para la pendiente de la tangente a la curva $y = x^3$ en el punto en que $x = 2$, examinando los valores de $\frac{(2 + h)^3 - 2^3}{h}$ cuando $h = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, etc.

La secuencia de operaciones con la calculadora en este caso para $h = 0{,}001$ sería:

$$(2 + 0.001)y^x3 - 2y^x3/0.001 =$$

Esto debe dar un resultado de 12.006.

Repitiendo la secuencia anterior pero con 0,0001 en vez de 0,001 se obtiene un resultado de 12.0006, y si se utiliza 0,00001 se obtiene 12.

La pendiente de la tangente a $y = x^3$ en el punto $x = 2$ es 12. Este resultado es el que se habría obtenido calculando dy/dx.

Comprobando, si $y = x^3$, entonces, cuando $x = 2$, $dy/dx = 3x^2 = 23 \times 2^2 = 12$.

21.7. Cálculo de polinomios

Con frecuencia, en la diferenciación e integración se requiere calcular una expresión del tipo $x^3 + 4x^2 + 5x + 3$ para un valor o un conjunto de valores de x dado. Utilizando una calculadora se puede realizar este cálculo, calculando cada término por separado y, a continuación, sumando el resultado en la memoria.

Ejemplos resueltos

1.*a*) Hallar $x^3 + 4x^2 + 5x + 3$, cuando $x = 2{,}1$.

$$x^3 = 9{,}261$$
$$4x^2 = 17{,}64$$
$$5x = 10{,}5$$
$$3 = 3$$

de modo que $x^3 + 4x^2 + 5x + 3 = 40{,}401$.

Un método mucho más rápido, sin embargo, consiste en usar un proceso conocido como *multiplicación en nido (nested multiplication).* Este procedimiento es especialmente útil cuando hay que efectuar varias veces el cálculo, por ejemplo, cuando hay que calcular la tabla de valores de los puntos de una gráfica.

1.*b*) Hallar $x^3 + 4x^2 + 5x + 3$, cuando $x = 2{,}1$ y $x = 2{,}7$.

Podemos reescribir la expresión $x^3 + 4x^2 + 5x + 3$ así:

$$x[x(x + 4) + 5] + 3$$

Si se introduce en la memoria el valor deseado de x, la secuencia de operaciones de la calculadora será:

$$\text{MR} + 4 = \times \text{MR} + 5 = \times \text{MR} + 3 =$$

Utilizando esta secuencia con 2,1 en la memoria se obtiene 40.401.

Utilizando esta secuencia con 2,7 en la memoria se obtiene 65.343.

21.8. Uso del ordenador personal

Casi todos los ordenadores personales, domésticos o portátiles, pueden efectuar cálculos matemáticos como una calculadora. Además, la mayoría de ellos pueden trabajar en el lenguaje de programación llamado BASIC, acrónimo de *Beginners Allpurpose Symbolic Instruction Code* (algo así como Código de Instrucción Simbólica General para Principiantes). Estas dos propiedades permiten efectuar una gran variedad de cálculos matemáticos complejos con una gran rapidez.

Para utilizar un ordenador como calculadora lo primero que hay que hacer es asegurarse de que la máquina está en el modo en el que puede utilizarse el BASIC. Esto ocurre o inmediatamente, cuando la máquina se enciende, o se puede obtener muy fácilmente. Conviene consultar el manual del fabricante, si hay alguna duda sobre esto.

Tecléese PRINT 3 + 4, y, a continuación, púlsese la tecla de RETURN (o ENTER). El resultado 7 debe aparecer en pantalla.

Ahora, tecléese PRINT 3 * 7 + 5, y , a continuación, púlsese la tecla de RETURN. El resultado 26 debe aparecer en pantalla.

Nota. El símbolo * se utiliza para la multiplicación y el símbolo / para la división.

Ahora, tecléese PRINT SIN(1) y, a continuación, púlsese la tecla RETURN. Normalmente, el resultado 0.841471 aparece en la pantalla, ya que la computadora trata el 1 en SIN(1) como un ángulo en radianes (1 radián = 57,3°).

Para cálculos más complejos, el uso del paréntesis y otros símbolos es muy similar al modo en que estos símbolos se usan en la mayoría de las calculadoras manuales. Si no se usan paréntesis, la computadora seguirá la lógica *algebraica* estándar. La mayoría de las funciones matemáticas corrientes son asequibles de inmediato. Una lista completa de ellas se da en el manual del fabricante.

Tecléese PRINT (3 + 4) * TAN(1) y, a continuación, púlsese la tecla de RETURN. Debe obtenerse el resultado 10,901854 [7 × tg(57,3°)] ó 7 × 1.5574077).

21.9. Utilización de programas cortos en BASIC

Para programar un ordenador para que efectúe matemáticamente una serie de cálculos hay, primero, que darle las instrucciones necesarias en un orden correcto y, a continuación, ordenarle que corra (RUN) el programa.

Ejemplo resuelto

Calcular $\dfrac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}x}{h}$ cuando $x = 1$ y $h = 0{,}001$.

El programa consta de tres partes: los datos, el cálculo en sí y la impresión del resultado.

```
10 X = 1
20 H = 0,001
30 G = (SIN(X + H) - SIN(X))/H
40 PRINT X, H, G
```

A cada instrucción se le asigna un número en orden, generalmente 10, 20, 30, 40,..., etc. Esto le indica a la máquina el orden en el que hay que ejecutar las instrucciones, comenzando con el número más pequeño en la secuencia.

Nota. Se usan los múltiplos de 10, pues esto deja espacio, si hiciera falta, para insertar otras instrucciones posteriormente sin necesidad de volver a numerar las instrucciones ya existentes.

Comenzar tecleando la primera línea del programa anterior exactamente tal como está escrita. Al final de la línea, pulsar la tecla de RETURN; a continuación, la siguiente línea más la tecla de RETURN, y así sucesivamente, para cada línea del programa.

Como comprobación de que se ha hecho esto correctamente, tecleése la palabra LIST y púlsese la tecla RETURN. Esto debe dar una copia en la pantalla de las instrucciones retenidas ahora en la memoria de la computadora. Se pueden hacer cambios en el programa reescribiendo la línea particular correspondiente.

Ahora tecléese la palabra RUN y púlsese la tecla RETURN. Esto hará que el programa corra. El resultado 0,5398815 debe aparecer impreso en pantalla.

21.10. Aprovechamiento de las ventajas del ordenador

Las verdaderas ventajas del uso del ordenador para cálculos matemáticos se aprecian cuando hay que efectuar varios cálculos muy similares o cálculos repetitivos. A continuación, se indica cómo se puede usar un programa sencillo para calcular las coordenadas de los puntos de una gráfica. El programa se modifica, a continuación, de modo que se pueda usar para hallar los valores máximos y mínimos de la expresión.

Ejemplo resuelto

Hallar las coordenadas de los puntos de la gráfica de $y = x^3 - 4x + 1$, para valores de x de -3 a $+3$ (Fig. 21.2).

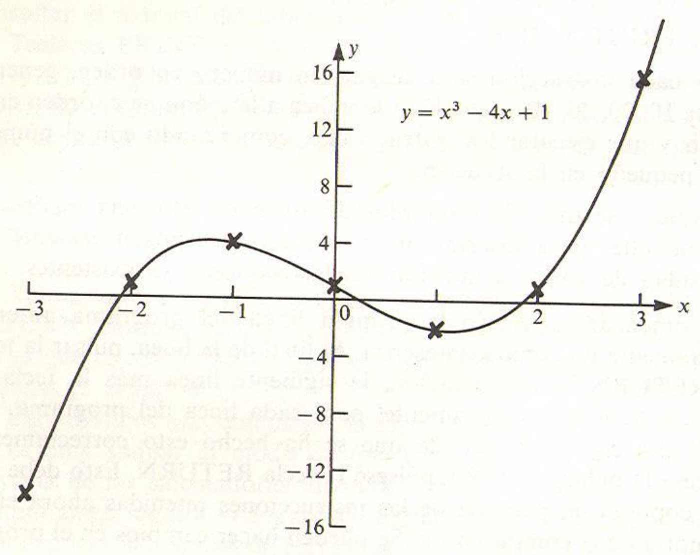


Figura 21.2.

En este caso, hay que hallar $x^3 - 4x + 1$, primero cuando $x = -3$ y luego cuando $x = -2$, y así sucesivamente hasta $x = 3$.

El programa para estos cálculos utiliza un par de instrucciones especiales:

FOR X = – 3 TO 3 and NEXT X

```
10 FOR X = – 3 TO 3
20 Y = X*X*X* – 4*X + 1
30 PRINT X,Y
40 NEXT X
```

En primer lugar, teclear cada línea de este programa. Teclear luego LIST para comprobar que se ha escrito el programa correctamente y luego pulsar RUN. Los siguientes pares de números deben aparecer impresos en dos columnas en la pantalla.

–3	–14
–2	1
–1	4
0	1
1	–2
2	1
3	16

El programa se puede modificar, a continuación, para obtener una estimación más exacta para los puntos máximos y mínimos de la curva.

El punto máximo debería aparecer entre $x = -2$ y $x = 0$ y el mínimo entre $x = 0$ y $x = 2$.

Podemos examinar más detenidamente la parte de la gráfica (Fig. 21.3) entre $x = -2$ y $x = 0$ cambiando la instrucción 10 por:

```
10 FOR X = – 2 TO 0 STEP (0.1)
```

Esto haría que se tomara primero el valor de $x = -2$, luego el valor –1,9, –1,8, y así sucesivamente. La correspondiente tabla de valores será:

–2.0	1
–1.9	1.741

−1.8	2.368
−1.7	2.887
−1.6	3.304
−1.5	3.625
−1.4	3.856
−1.3	4.003
−1.2	4.072
−1.1	4.069
−1.0	4

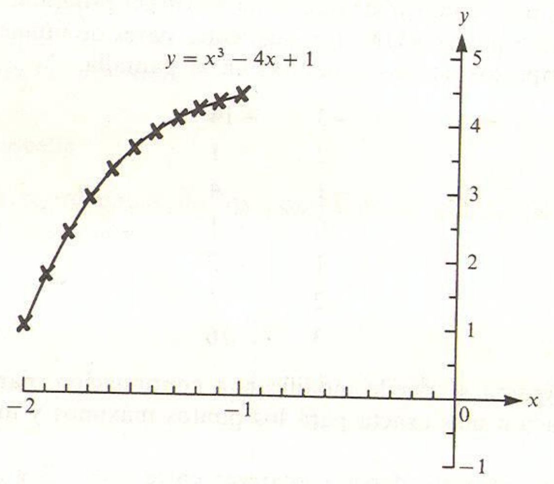


Figura 21.3.

Esto sugiere que el valor máximo está comprendido entre $x = -1{,}3$ y $-1{,}1$. Podemos hallar este valor aún más exactamente cambiando la línea 10 por:

```
10 FOR X = − 1.3 TO − 1.1 STEP (0.01)
```

EJERCICIOS

1. Utilícese la fórmula $A = 1/2(a + b)h$ para encontrar el área de los trapecios siguientes:

a) $a = 5{,}2$ cm; $b = 4{,}9$ cm; $h = 7{,}2$ cm.
b) $a = 2{,}5$ cm; $b = 8{,}4$ cm; $h = 5{,}1$ cm.
c) $a = 3{,}21$ cm; $b = 4{,}32$ cm; $h = 5{,}43$ cm.

2. Hallar la pendiente de la recta que une los puntos:

a) (1, 3) y (2, 7).
b) (1,5, 2,7) y (3, 10).
c) (1,3, 2,7) y (1,5, 4,6).

3. Calcular $\dfrac{5}{2x - 3}$, cuando $x = 2{,}1$.

4. Calcular $\dfrac{4x}{2x^2 + 1}$, cuando $x = 3{,}2$. Asimismo, hallar la pendiente de $y = \ln(2x^2 + 1)$, cuando $x = 32$.

5. Hallar 7 × £42 + 5 × £71 + 2 × £28.

6. Hallar $2^3 + 3^3 + 4^3$.

7. Utilizar la regla de Simpson, $A = \dfrac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$, para hallar el área comprendida por $y = x^2$ entre $x = 1{,}2$ y $x = 2{,}2$, siendo el valor de $h = 0{,}5$.

8. *a*) Hallar $\sqrt{2{,}3}$.
b) Hallar la pendiente de $y = x^{3/2}$ cuando $x = 2{,}3$.

9. *a*) Hallar $\dfrac{1}{17{,}5}$.
b) Hallar la pendiente de $y = \ln(x)$ cuando $x = 17{,}5$.

10. *a*) Hallar $(2{,}7)^{3{,}2}$.
b) Hallar la pendiente de $y = x^{4{,}2}$ cuando $x = 2{,}7$.

11. Hallar *a*) sen 60°; *b*) ln 5; *c*) log 5.

12. *a*) Hallar $\cos(\pi/4)$.
b) Hallar la pendiente de $y = \text{sen}(2x)$, cuando $x = \pi/8$.

13. Ajustar la calculadora en el modo *degree* y hallar: *a*) $\text{tg}^{-1}\,1$; *b*) $\text{sen}^{-1}\,0{,}5$; *c*) $\cos^{-1}\,0{,}5$.

14. Ajustar la calculadora en el modo *radian* y hallar: *a*) $\text{tg}^{-1}\,1$; *b*) $\text{sen}^{-1}\,0{,}5$; *c*) $\cos^{-1}\,0{,}5$.

15. Hallar LN 7.2 (esto es, ln 7,2) y $e^{1.974081}$.

16. Hallar LOG 3 (esto es, log 3) y $10^{0.4771213}$.

17. Integrar $\dfrac{1}{1+x^2}$ y a partir del resultado calcular $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

18. Integrar $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ y a partir del resultado calcular $\displaystyle\int_0^{0,5} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

19. Hallar $[(5+h)^3 - 5^3]/h$ cuando $h = 0{,}1$, $0{,}01$, $0{,}001$, etc. A partir del resultado, comprobar que la pendiente de $y = x^3$ para $x = 5$ es 75.

20. Hallar $\dfrac{\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}+h\right) - \text{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{h}$, cuando $h = 0{,}1$, $0{,}001$, $0{,}00001$, etc. A partir del resultado, comprobar que la pendiente de $y = \text{sen}\,x$ para $x = \pi/4$ es 0,7071068.

21. Demostrar que $x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ se puede reescribir como:

$$x[x(x+3) - 2] + 7$$

A partir de ahí, hallar el valor de la expresión $x^3 + 3x^2 - 2x + 7$ cuando $x = 2{,}1$ y $x = 2{,}7$.

22. Demostrar que $x^4 + 7x^3 + 5x^2 + 2x + 1$ se puede reescribir como:

$$x\{x[x(x + 7) + 5] + 2\} + 1$$

A partir de ahí, hallar el valor de la expresión primitiva cuando $x = 2{,}1$ y $x = 2{,}7$.

23. Reescribir la expresión $x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ en su forma de *multiplicación en nido*. A partir de ahí, hallar el valor de $x^3 - 3x^2 + 4x - 7$ cuando $x = 0, 1, 2, 3, 4$ y 5.

24. Cambiar la línea 20 en el programa del apartado 21.9 por:

```
20 H = 0.0001
```

Correr de nuevo el programa. El resultado debe ser 0.5402605. ¿Es correcto que la pendiente de $y = \operatorname{sen} x$, para $x = 1$, es 0.5402605?

25. Cambiar la línea 30 en el programa del ejemplo anterior por:

```
10 X = 7
```

Correr el programa de nuevo. El resultado debe ser 0.7539023. ¿Es correcto que la pendiente de $y = \operatorname{sen} x$, para $x = 7$, es 0.7539023?

26. Cambiar la línea 30 en el programa del apartado 21.9 por:

```
30 G = ((X + H) * (X + H) − X * X)/H
```

Correr el programa de nuevo. El resultado debe ser 14,0001. ¿Es correcto que la pendiente de $y = x^2$, para $x = 7$, es $2 \times 7 = 14$?

El programa dado se puede usar para calcular cualquier expresión de la forma $[(f(x + h) - f(x)]/h$ cambiando la línea 30 por las adecuadas $f(x + h)$ y $f(x)$.

27. Cambiar la línea 10 del programa del apartado 21.10 por:

```
10 FOR X = − 1.3 TO − 1.1 STEP (0.01)
```

y localizar el valor máximo con más precisión. Comprobar que el valor máximo se da cuando $x = -\sqrt{\frac{4}{3}}$.

28. Cambiar la línea 10 del programa del apartado 21.10 por:

```
10 FOR X = 0 TO 2 STEP (0.01)
```

y localizar el valor máximo con más precisión. Comprobar que el valor máximo se da cuando $x = +\sqrt{\frac{4}{3}}$.

29. Cambiar las líneas 10 y 20 del programa del apartado 21.10 por:

```
10 FOR X = – 1 TO 4
20 Y = X*X – 3*X
```

Correr el programa de nuevo y representar la gráfica de $y = x^2 - 3x$ para los valores de x de -1 a 4. Luego, cambiar la línea 10 por:

```
10 FOR X = 1 TO 2 STEP (0.1)
```

y localizar el valor mínimo con más precisión. Comprobar que el valor mínimo se da cuando $x = 1.5$.

30. Cambiar las líneas 10 y 20 del programa del apartado 21.10 por:

```
10 FOR X = 0 TO 6 STEP (0.25)
20 Y = SIN(X)
```

Correr el programa de nuevo y representar la gráfica de $y = \operatorname{sen} x$ para valores de x de 0 a 6, medidos en radianes. Comprobar que el valor máximo se da cuando $x = 1{,}57$.

Nota. Si se desea eliminar, no simplemente cambiar, una instrucción en un programa, tecléese el número de la línea y púlsese la tecla RETURN. Si se quiere eliminar todo el programa para empezar uno nuevo, tecléese la palabra NEW y luego púlsese la tecla RETURN.

22 Integración y resolución numéricas de ecuaciones diferenciales

En el capítulo 14 se han presentado las ideas de la integración como suma y, en particular, en las páginas 339-343 se consideraron las reglas del trapecio y de Simpson.

Ambos métodos nos dan una buena aproximación para hallar el área comprendida por una curva. Se puede obtener una exactitud aún mayor aumentando el número de intervalos utilizados. Además, puesto que cada uno de los métodos comprende una serie de cálculos repetitivos, se puede utilizar muy eficazmente un programa de ordenador, no sólo para ahorrar tiempo sino también para poder considerar un intervalo completo de situaciones diferentes.

Todavía más importante es el hecho de que el ordenador permite hallar muy buenas aproximaciones a las áreas comprendidas por curvas cuando no es posible utilizar los métodos algebraicos normales de integración.

A continuación, se ilustra cómo se puede usar un programa muy sencillo de ordenador para calcular prácticamente cualquier integral definida con un buen grado de exactitud. No podemos en este libro examinar programas más complejos, pero esperamos que el material presentado anime a los lectores a iniciarse en el tema y a seguir avanzando por medio de otros textos más detallados.

22.1. La regla del trapecio

La fórmula de la página 339, basada en el uso del área de un trapecio como una aproximación al área comprendida por la curva

en cada intervalo, nos da el área comprendida por la curva entre $x = a$ y $x = b$ (Fig. 22.1) como:

$$\frac{1}{2}l(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}l(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}l(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}l(y_3 + y_4) +$$

$$+ \frac{1}{2}l(y_4 + y_5) + \frac{1}{2}l(y_5 + y_6) + \frac{1}{2}l(y_6 + y_7) + \frac{1}{2}l(y_7 + y_8)$$

donde hay 8 intervalos y el valor de l es $(b - a)/8$.

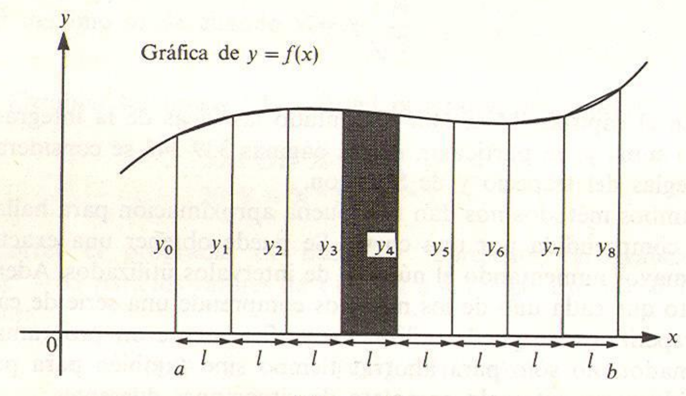


Figura 22.1

Ejemplo resuelto

Hallar el área comprendida por la curva $y = 3x^2$ entre $x = 1$ y $x = 5$.

Utilizando la regla del trapecio con 8 intervalos, $a = 1$, $b = 5$; por tanto, $l = (5 - 1)/8 = 0{,}5$.

Se da a continuación un programa que permite hallar esta área:

```
10 A = 1
20 B = 5
30 N = 8
40 L = (B – A)/N
50 S = 0
60 FOR X = A TO (B – L) STEP (L)
```

```
 70 T = (3 * X * X + 3 * (X + L) * (X + L)) * L/2
 80 S = S + T
 90 PRINT S
100 NEXT
```

Escríbase el programa y, a continuación, córrase el programa. Se verá que en la pantalla del ordenador aparece impreso el resultado 124.5.

Nota. Se calcula el área de cada trapecio en la línea 70 y, a continuación, se suma cada área a la suma total en la línea 80.

22.2. Regla de Simpson

El programa del último apartado requerirá sólo una pequeña modificación para poder ser utilizado en la regla de Simpson. La fórmula de la página 342 nos da el área comprendida por la curva entre valores de $x = a$ y $x = b$ como:

$$\frac{1}{3}l(y_1 + 4y_2 + y_3) + \frac{1}{3}l(y_3 + 4y_4 + y_5) + $$
$$+ \frac{1}{3}l(y_5 + 4y_6 + y_7) + \frac{1}{3}l(y_7 + 4y_8 + y_9)$$

donde hay 8 intervalos y el valor de l es $(b - a)/8$.

Esta fórmula normalmente nos da una mejor aproximación al área que la regla del trapecio.

Ejemplo resuelto

Hallar el área comprendida por la curva $y = \cos x$ entre $x = 0$ y $x = 1$.

Utilizando la regla de Simpson con 8 intevalos, $a = 0$, $b = 1$ y, por tanto, $l = (1 - 0)/8 = 0{,}125$.

El programa modificado en este caso es el siguiente:

```
10 A = 0
20 B = 1
```

```
30 N = 8
40 L = (B - A)/N
50 S = 0
60 FOR X = A TO (B - 2 * L) STEP (2 * L)
70 T = (COS(X) + 4 * COS(X + L) + COS(X + 2 * L)) * L/3
80 S = S + T
90 PRINT S
100 NEXT X
```

Cambiar las líneas 60 y 70 como se indica y, a continuación, correr el programa.

El área que aparece impresa será 0.84147213.

Nota. El paso longitud (L) en la línea 60 se ha reemplazado por el paso 2L, y la fórmula de Simpson ha sustituido a la fórmula del trapecio en la línea 70. En lo demás, el programa es idéntico al ejercicio 3 de este capítulo.

22.3. La regla de la ordenada media

Un método alternativo, que utiliza una fórmula mucho más simple que la regla del trapecio o la de Simpson, se basa en el uso de los rectángulos formados a partir de la ordenada media en cada intervalo. Esto se ilustra con el diagrama de la figura 22.2.

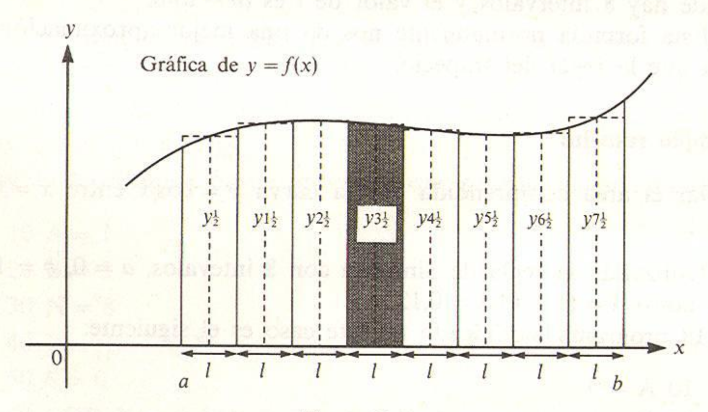


Figura 22.2

La aproximación para el área comprendida por una curva, utilizando 8 intervalos, viene dada por la fórmula:

$$l \cdot y_{0,5} + l \cdot y_{1,5} + l \cdot y_{2,5} + l \cdot y_{3,5} + l \cdot y_{4,5} + \\ + l \cdot y_{5,5} + l \cdot y_{6,5} + l \cdot y_{7,5}$$

o, más sencillamente:

$$l \cdot (y_{0,5} + y_{1,5} + y_{2,5} + y_{3,5} + y_{4,5} + y_{5,5} + y_{6,5} + y_{7,5})$$

Para utilizar esta fórmula sólo es necesario calcular los valores de 7 en el punto medio de cada intervalo, sumar todos esos valores y, a continuación, multiplicar la suma por la anchura de cada intervalo.

Puesto que cada rectángulo está en parte por encima de la curva y en parte por debajo, los errores se compensan mutuamente y así el método resulta considerablemente más exacto que la regla del trapecio incluso para un número más pequeño de intervalos.

Ejemplo resuelto

Hallar el área comprendida por la curva $y = \cos x$ y los valores de $x = 0$ y $x = 1$.

Utilizando la regla de la ordenada media con 8 intervalos, $a = 0$, $b = 1$ y, por tanto, $l = (1 - 0)/8 = 0{,}125$.

Un programa para este caso sería el siguiente:

```
10 A = 0
20 B = 1
30 N = 8
40 L = (B – A)/N
50 S = 0
60 FOR X = (A + L/2) TO (B – L/2) STEP (L)
70 Y = COS(X)
80 S = S + Y * L
90 PRINT S
100 NEXT X
```

Cambiar las líneas 60, 70 y 80 y, a continuación, correr el programa. Se encontrará un valor de área de 0.84201907.

Nota. Los valores de x, en la línea 60, a partir de los cuales se calculan los valores correspondientes de y, comienzan en el punto medio del primer intervalo.

La regla de la ordenada media es muy sencilla de usar, ya que al aumentar el número de intervalos en la línea 30, se puede obtener un resultado con la exactitud que se desee. Además, al cambiar los puntos finales del intervalo en las líneas 10 y 20 y la función en la línea 70, el programa se puede aplicar al cálculo del área comprendida por cualquier curva y así calcular cualquier integral definida.

22.4. Solución numérica de ecuaciones diferenciales

A diferencia de los diversos métodos algebraicos que son necesarios para resolver los diferentes tipos de integración, un método numérico, como el de la regla de la ordenada media, se puede utilizar para calcular una integral definida cualquiera. Del mismo modo, mientras que se requieren varios métodos diferentes para resolver ecuaciones diferenciales incluso de primer orden y primer grado, un sencillo método numérico se puede utilizar para encontrar una aproximación muy buena para una solución particular.

Hemos visto en la página 428 que la solución general de una ecuación diferencial representaba a una familia de curvas. Para encontrar una solución particular, o un miembro específico de esta familia, necesitamos conocer, al menos, un punto de la curva solución.

Por ejemplo, la solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = 2x$ es la familia de parábolas $y = x^2 + C$. Si sabemos que una solución particular pasa por el punto (0, 1), entonces podemos hallar de qué miembro de la familia se trata sustituyendo $x = 0$ e $y = 1$ en $y = x^2 + C$. Así, en este caso, $1 = 0^2 + C$ y $C = 1$. La solución buscada es $y = x^2 + 1$.

El método numérico para resolver ecuaciones diferenciales se basa en la idea de que la tangente en un punto particular a la curva solución es una aproximación muy buena a la curva misma cuando está muy cerca del punto (Fig. 22.3).

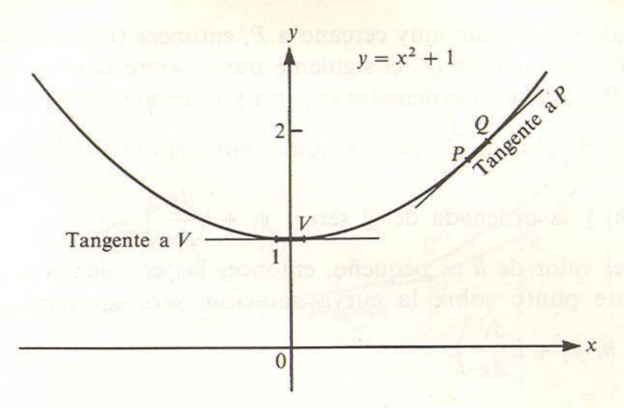


Figura 22.3.

La tangente a $y = x^2 + 1$ en el punto (0, 1) es horizontal, ya que cuando $x = 0$, $\dfrac{dy}{dx}$, que es $2x$, es igual a cero. La curva es plana en este punto.

En general, en el punto P, la curva es muy similar al pequeño segmento lineal PQ, que es una parte de la tangente en P. La pendiente de la tangente viene dada por el valor de $\dfrac{dy}{dx}$ en P.

En la figura 22.4, P es un punto conocido sobre la curva solución buscada. Se traza la tangente a esta curva en el punto P. Si Q es un

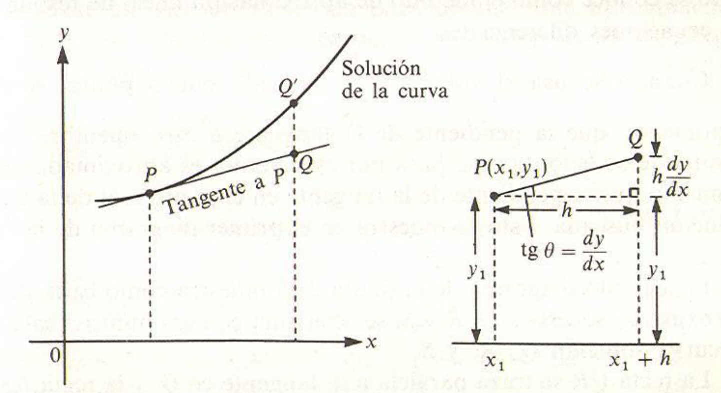


Figura 22.4.

punto de la tangente muy cercano a P, entonces Q será una aproximación razonable de Q', el siguiente punto sobre la curva solución.

Si P tiene las coordenadas (x_1, y_1) y la pendiente de la tangente en P es el valor de $\frac{dy}{dx}$ en este punto, entonces la abscisa de Q será $(x_1 + h)$ y la ordenada de Q será $\left(y_1 + h\frac{dy}{dx}\right)$.

Si el valor de h es pequeño, entonces las coordenadas de Q', el siguiente punto sobre la curva solución, será aproximadamente $\left(x_1 + h, y_1 + h\frac{dy}{dx}\right)$.

22.5. Método de aproximación lineal

Si conocemos un punto de una curva solución particular y la pendiente de la tangente, que viene dada por el valor de $\frac{dy}{dx}$ en este punto, entonces podemos obtener una aproximación para el punto siguiente de la curva utilizando un segmento lineal muy pequeño de la misma tangente. Podemos utilizar el valor de $\frac{dy}{dx}$ en este punto siguiente para trazar otra línea y utilizar la nueva línea para encontrar una aproximación para un tercer punto de la curva solución. Esto se conoce como el método de aproximación lineal de resolución de ecuaciones diferenciales.

Cuando se usa el valor de $\frac{dy}{dx}$ en cada nuevo punto, se está suponiendo que la pendiente de la tangente a otro miembro de la familia de soluciones, que pasa por este punto, es aproximadamente el mismo que la pendiente de la tangente en el punto real de la curva solución buscada. Esto se muestra en el primer diagrama de la figura 22.5.

El segundo diagrama de la figura 22.5 muestra cómo cada punto aproximado sucesivo, Q, R y S, se relaciona con los puntos reales de la curva solución Q', R' y S'.

La recta QR se traza paralela a la tangente en Q' y la recta RS se traza paralela a la tangente en R'.

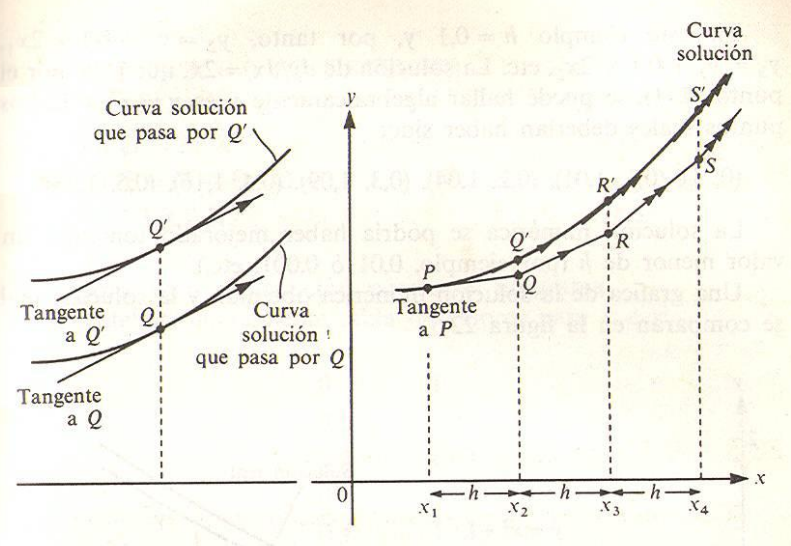


Figura 22.5.

En general, si P es el punto (x_n, y_n) y Q es el punto siguiente (x_{n+1}, y_{n+1}), entonces $x_{n+1} = x_n + h$ e $y_{n+1} = y_n + h(dy/dx)$, donde dy/dx se calcula en el punto (x_n, y_n).

Ejemplos resueltos

1. Utilizar un método numérico para obtener una aproximación para la curva solución de la ecuación diferencial $dy/dx = 2x$, que pasa por el punto (0, 1).

Usar $h = 0{,}1$ como anchura del intervalo.
El siguiente valor de y es $[y + h(dy/dx)] = y + 0{,}1 \times 2x$.

	Valores de x	Valores de y	Valor de $dy/dx = 2x$
Primer punto	0	1	0
Siguiente punto	0,1	$1 + 0{,}1 \times 0 = 1$	0,2
Tercer punto	0,2	$1 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 1{,}02$	0,4
Cuarto punto	0,3	$1{,}02 + 0{,}1 \times 0{,}4 = 1{,}06$	0,6
Quinto punto	0,4	$1{,}06 + 0{,}1 \times 0{,}6 = 1{,}12$	0,8
Sexto punto	0,5	$1{,}12 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 1{,}20$	1,0

En este ejemplo $h = 0{,}1$ y, por tanto, $y_2 = y_1 + 0{,}1 \times 2x_1$, $y_3 = y_2 + 0{,}1 \times 2x_2$, etc. La solución de $dy/dx = 2x$, que pasa por el punto (0, 1), se puede hallar algebraicamente y es $y = x^2 + 1$. Los puntos reales deberían haber sido:

(0, 1), (0,1, 1,01), (0,2, 1,04), (0,3, 1,09), (0,4, 1,16), (0,5, 1,25)

La solución numérica se podría haber mejorado tomando un valor menor de h (por ejemplo, 0,01 ó 0,001, etc.).

Una gráfica de la solución numérica obtenida y la solución real se comparan en la figura 22.6.

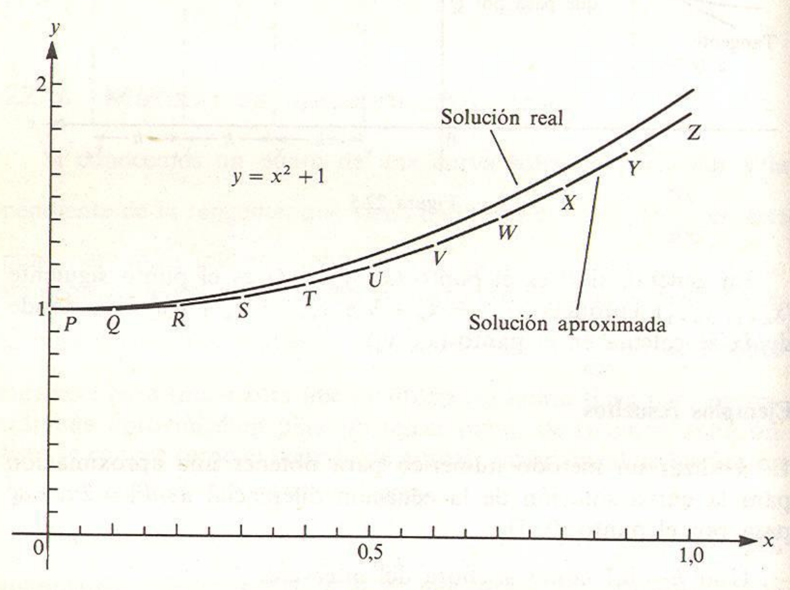


Figura 22.6.

Como claramente se trata de un trabajo repetitivo, se puede utilizar un programa de ordenador para estos cálculos. Necesitamos conocer el punto inicial (0, 1), el valor del intervalo h, pongamos por caso 0,1, y la fórmula para hallar la pendiente.

Un proceso sencillo para el ejemplo 1, sería:

```
10 X = 0
20 Y = 1
```

```
30 H = 0.1
40 FOR X = 0 TO 1 STEP (H)
50 PRINT X, Y
60 G = 2*X
70 Y = Y + H*G
80 NEXT X
```

Tecléese y, a continuación, córrase el programa.
Se obtendrá la siguiente tabla de valores para x e y:

0	1
0.1	1.00
0.2	1.02
0.3	1.06
0.4	1.12
0.5	1.20
0.6	1.30
0.7	1.42
0.8	1.56
0.9	1.72
1.0	1.90

Para un $x = 1$, el valor de y en la solución exacta, $y = x^2 + 1$, es 2. Incluso con esta anchura de intervalo h de 0,1, bastante grande, tenemos un valor de y de 1,9.

Se puede obtener una solución mejor utilizando un valor menor de h, pongamos por caso 0,01.

Cambiar la línea 30 del programa por 30 H = 0.01.

Correr el programa de nuevo. Se encontrará ahora que el valor de y, correspondiente a un valor de $x = 1$, es 1.99, razonablemente cercano al valor real de 2.

La precisión se puede mejorar más tomando $h = 0{,}001$.

El método anterior se puede utilizar con cualquier ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$. Se debe tan sólo cambiar la parte derecha de la línea 60 en el programa, ya que ésta es la expresión para el cálculo de la pendiente.

2. Utilizar un método numérico para obtener una aproximación para la curva solución de la ecuación diferencial $dy/dx = y$, que pasa por el punto (0, 1).

Utilizar $h = 0{,}1$ como anchura de intervalo.

	Valores de x	Valores de y	Valor de $dy/dx = y$
Primer punto	0	1	1
Siguiente punto	0,1	$1 + 0{,}1 \times 1 = 1{,}1$	1,1
Tercer punto	0,2	$1{,}1 + 0{,}1 \times 1{,}1 = 1{,}21$	1,21
Cuarto punto	0,3	$1{,}21 + 0{,}1 \times 1{,}21 = 1{,}331$	1,331
Quinto punto	0,4	$1{,}331 + 0{,}1 \times 1{,}331 = 1{,}4641$	1,4641
Sexto punto	0,5	$1{,}4641 + 0{,}1 \times 1{,}4641 = 1{,}61051$	1,61051

La solución real de la ecuación $dy/dx = y$, que pasa por el punto (0, 1), es $y = e^x$. Los puntos correspondientes de esta curva son: (0, 1), (0,1, 1,105), (0,2, 1,221), (0,3, 1,350), (0,4, 1,492) y (0,5, 1,649).

Cambiar las líneas 30 y 60 en el programa del ejemplo 1 por:

30 H = 0.1 y 60 G = Y

Correr el programa modificado.

Se encontrará que el valor de y, correspondiente a $x = 1$, es 2.5937.

Correr el programa de nuevo cambiando la línea 30 por 30 H = 0.001.

Ahora, cuando $x = 1$, se encontrará el valor de $y = 2.7169$, bastante comparable con la solución real de e^1, que es 2,7182.

22.6. Método modificado de aproximación lineal

Mientras que el método que hemos examinado hasta ahora puede hacerse cada vez más exacto escogiendo valores más pequeños de anchura de intervalo para h, una sencilla modificación de este método aumenta su exactitud considerablemente. En este caso se utiliza un proceso promediador.

En el primer diagrama de la figura 22.7 puede observarse que la pendiente de la cuerda PQ' de una curva caerá entre la pendiente G_1

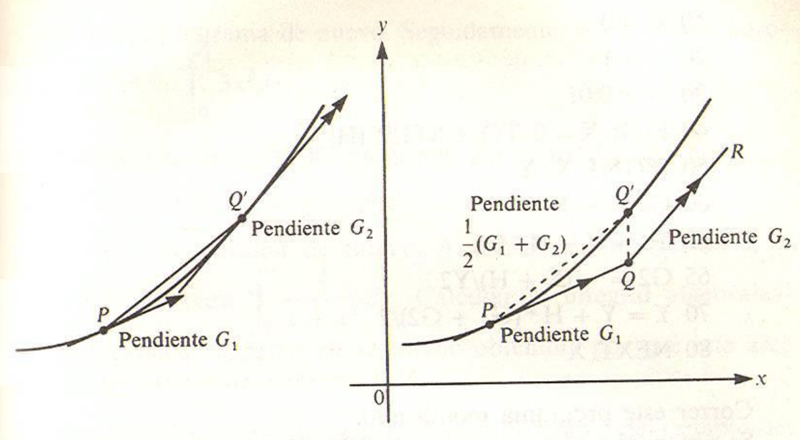


Figura 22.7.

de la tangente en P y la pendiente G_2 de la tangente en Q', siendo aproximadamente el valor medio de estas dos pendientes, esto es, $(G_1 + G_2)/2$.

Si se puede hallar esta pendiente promedio, trazando entonces la recta PQ', como en el segundo diagrama, se obtendrá claramente una aproximación al punto Q' mejor que utilizando simplemente la tangente original como hemos hecho antes.

Este método modificado se puede resumir de la manera siguiente:

— Hallar el valor de dy/dx en el primer punto P. Llamar a esta pendiente G_1.

— Trazar la tangente PQ y hallar el punto Q.

— A continuación, hallar el valor de dy/dx en el punto Q. Llamar a esta pendiente G_2.

— Hallar la pendiente promedio de G_1 y G_2, esto es, $(G_1 + G_2)/2$.

— Utilizar esta pendiente promedio para trazar la línea PQ' hasta el siguiente punto Q'.

— Seguidamente, repetir el proceso a partir del segundo punto Q'.

Una vez más, éste es un proceso claramente repetitivo para el que viene muy bien un programa de ordenador.

El programa modificado para resolver la ecuación $dy/dx = -x/y$, que pasa por el punto (0, 1) sería:

```
10 X = 0
20 Y = 1
30 H = 0.01
40 FOR X = 0 TO 1 STEP (H)
50 PRINT X, Y
60 G1 = - X/Y
62 Y2 = Y + H * G1
65 G2 = - (X + H)/Y2
70 Y = Y + H * (G1 + G2)/2
80 NEXT X
```

Correr este programa modificado.

Se obtendrá para y un valor de 0.03645... cuando $x = 1$, el cual está muy cerca del valor real de 0 hallado en el ejercicio 12 de este capítulo.

EJERCICIOS

1. Escribir el número de intervalos en el programa del ejemplo del apartado 22.1 volviendo a escribir la línea 30 como 30 N = 16. Correr el programa de nuevo. Se encontrará impreso 124.125. Comparar este resultado con:

$$\int_1^5 3x^2 dx = [x^3]_1^5 = 125 - 1 = 124$$

2. Ahora, cambiar la línea 30 del programa del apartado 22.1 por 30 N = 32. Correr de nuevo el programa. ¿Está el resultado que se obtiene más cerca del valor exacto del área, 124?

3. Cambiar las líneas 10 y 20 en el programa del apartado 22.1 por:

```
10 A = 0
20 B = 1
```

Correr el programa de nuevo. Seguidamente, calcular una aproximación para $\int_0^1 3x^2dx$.

4. Cambiar la línea 70 del programa del apartado 22.1 por:

```
70 T = (4/(1 + X * X) + 4/(1 + (X + L) * (X + L))) * L/2
```

Correr el programa de nuevo. A continuación, escribir una aproximación para $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$. Calcular la integral algebraicamente y explicar, a partir del resultado obtenido, por qué esta área es una aproximación para π.

5. Cambiar el número de intervalos en el programa del ejemplo del apartado 22.2, volviendo a escribir la línea 30 como 30 N = 16. Correr de nuevo el programa. Se debe hallar un área de 0.8417106. Comprobar este resultado con:

$$\int_0^1 \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^1 = \operatorname{sen}(1)$$

6. Ahora, cambiar la línea 30 en el programa del apartado 22.2 por 30 N = 32. Correr de nuevo el programa. Comprobar si el resultado es mucho más cercano al área exacta de sen (1) = 0,841471.

7. Cambiar el número de intervalos del programa del ejemplo del apartado 22.3 volviendo a escribir la línea 30 como 30 N = 16. Correr el programa de nuevo. La nueva área sería 0.84160796. Comparar este resultado con:

$$\int_0^1 \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^1 = \operatorname{sen}(1)$$

8. Ahora, cambiar la línea 30 del programa del apartado 22.3 por 30 N = 32. Correr el programa de nuevo. Comprobar si el nuevo resultado está mucho más cerca del valor exacto de área de sen (1) = 0,841471.

9. Ahora, cambiar la línea 30 del programa del apartado 22.3 por 30 N = 64. Correr el programa de nuevo. Comprobar si el resultado que se obtiene está aún mucho más cerca del área exacta.

10. Cambiar la línea 70 en el programa del apartado 22.3 por 70 Y = 4/(1 + X * X). Correr el programa de nuevo. Seguidamente escribir una aproximación para $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx$. ¿Es el resultado obtenido el esperado?

11. Cambiar la línea 60 del programa del ejemplo 2 del apartado 22.5 por 60 G = – X/Y y hallar una solución numérica para la ecuación $\frac{dy}{dx} = -x/y$. ¿Cuál es el valor de y cuando $x = 1$?

12. Resolver algebraicamente la ecuación $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

¿Será la curva solución, que pasa por el punto (0, 1), la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$?

¿Cuál es el valor de y cuando $x = 1$? Comparar la respuesta con la respuesta al ejercicio 11.

13. Cambiar las líneas 30, 60 y 65 en el programa del ejemplo del apartado 22.6 por:

30 H = 0.1, 60 G1 = Y, 65 G2 = Y2

Correr este programa modificado para hallar la solución numérica de la ecuación $dy/dx = y$ que pasa por el punto (0, 1).

A continuación, cambiar la línea 30 por 30 H = 0.01 y correr el programa de nuevo. Comparar los resultados con los del ejemplo 2 del apartado 22.5.

14. Cambiar las líneas 30, 60 y 65 en el programa del apartado 22.6 por:

30 H = 0.1, 60 G1 = 2 * X, 65 G2 = 2 * (X + H)

Correr este programa modificado para hallar la solución numérica de la ecuación $dy/dx = 2x$ que pasa por el punto (0, 1).

A continuación, cambiar la línea 30 por 30 H = 0.01 y correr el programa de nuevo. Comparar los resultados con los del ejemplo 1 del apartado 22.5.

Se puede usar este programa modificado para hallar la solución numérica de cualquier ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ que pase por el punto (a, b), sencillamente cambiando las entradas correspondientes en el programa.

Apéndice

Integrales de formas estándar y otras integrales útiles

I. Funciones algebraicas

1. $$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1}.$$

2. $$\int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

3. $$\int a^x dx = a^x \log_a e.$$

4. $$\int e^x dx = e^x.$$

II. Funciones trigonométricas

5. $$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x \qquad \int \operatorname{sen} ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax.$$

6. $$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x \qquad \int \cos ax dx = \frac{1}{a}\operatorname{sen} ax.$$

7. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x = \ln \sec x.$

$\int \operatorname{tg} ax dx = \frac{1}{a} \ln \sec ax.$

8. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \operatorname{sen} x$ $\qquad \int \ln \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sen} ax.$

III. Funciones hiperbólicas

9. $\int \operatorname{Sh} x dx = \operatorname{Ch} x$ $\qquad \int \operatorname{Sh} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{Ch} ax.$

10. $\int \operatorname{Ch} x dx = \operatorname{Sh} x$ $\qquad \int \operatorname{Ch} ax dx = \frac{1}{a} \operatorname{Sh} ax.$

11. $\int \operatorname{Tgh} x dx = -\ln \operatorname{Ch} x$ $\qquad \int \operatorname{Tgh} ax dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{Ch} ax.$

12. $\int \operatorname{Ctgh} x dx = \ln \operatorname{Sh} x$ $\qquad \int \operatorname{Ctgh} ax dx = \frac{1}{a} \ln \operatorname{Sh} ax.$

IV. Funciones trigonométricas inversas

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a}$ o $-\cos^{-1} \frac{x}{a}.$

15. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{x}{a}$ o $-\frac{1}{a} \operatorname{ctg}^{-1} \frac{x}{a}.$

16. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \sec^{-1} \frac{x}{a}$ o $-\frac{1}{a} \operatorname{cosec}^{-1} \frac{x}{a}.$

V. Funciones hiperbólicas inversas

17. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \mathrm{Sh}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

18. $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \mathrm{Ch}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}).$$

---

19. $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{Tgh}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2a}\ln\frac{a + x}{a - x}.$$

20. $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a}\mathrm{Ctgh}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o} \quad \frac{1}{2a}\ln\frac{x - a}{x + a}.$$

---

21. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Sech}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o}$$
$$\text{o} \quad -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right).$$

22. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + x^2}} = -\frac{1}{a}\mathrm{Cosech}^{-1}\frac{x}{a} \quad \text{o}$$
$$\text{o} \quad -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + x^2}}{x}\right).$$

---

17. *a*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 + a^2}} = \frac{1}{b}\mathrm{Sh}^{-1}\frac{bx}{a} =$$
$$= \frac{1}{b}\ln(bx + \sqrt{b^2x^2 + a^2}).$$

18. *a*) $$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2 - a^2}} = \frac{1}{b}\mathrm{Ch}^{-1}\frac{bx}{a} =$$
$$= \frac{1}{b}\ln(bx + \sqrt{b^2x^2 - a^2})5.$$

---

19. *a*) $$\int \frac{dx}{a^2 - b^2x^2} = \frac{1}{ba}\,\mathrm{Tgh}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{2ba}\ln\frac{a + bx}{a - bx}.$$

20. *a*) $$\int \frac{dx}{b^2x^2 - a^2} = -\frac{1}{ba}\,\mathrm{Ctgh}^{-1}\frac{bx}{a} = \frac{1}{2ba}\ln\frac{bx - a}{bx + a}.$$

---

21. *a*) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 - b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Sech}^{-1}\frac{bx}{a} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2x^2}}{bx}\right).$$

22. *a*) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2 + b^2x^2}} = -\frac{1}{a}\,\mathrm{Cosech}^{-1}\frac{bx}{a} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2x^2}}{bx}\right).$$

Cuadrados de otras funciones circulares

23. $$\int \mathrm{sen}^2\, x dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2x\right).$$

24. $$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\, 2x\right).$$

25. $$\int \mathrm{tg}^2\, x dx = \mathrm{tg}\, x - x.$$

26. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx = -(\operatorname{ctg} x + x).$

27. $\int \sec^2 x dx = \operatorname{tg} x.$

28. $\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\operatorname{ctg} x.$

Otras integrales útiles

29. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2}.$

30. $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \operatorname{Ch}^{-1} \frac{x}{a}$ o

o $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$

31. $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{Sh}^{-1} \frac{x}{a}$ o

o $\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$

32. $\int \sec x dx = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ o $\ln(\sec x + \operatorname{tg} x).$

33. $\int \operatorname{cosec} x dx = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

34. $\int \ln x dx = x(\ln x - 1).$

Soluciones a los ejercicios

Capítulo 1

1. $-1,\ 1,\ 1,\ 17,\ 2a^2 - 4a + 1,\ 2(x + \delta x)^2 - 4(x + \delta x) + 1.$

2. $7,\ 0,\ -5,\ a(a + 6),\ \dfrac{(1 - a)(1 + 5a)}{a^2},\ 0.$

3. $0,\ 1,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -1.$

4. 9, 9,61, 9,0601, 9,006001, 6,001.

5. 1, 2, 8, 1,414...

6. $7,\ 0,\ -11,\ -x^3 - 5x^2 + 3x + 7.$

7. $3(t + \delta t)^2 + 5(t + \delta t) - 1.$

8. $2x\delta x + 2\delta x + (\delta x)^2.$

9. *a*) $x^3 + 3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3.$
b) $3x^2\delta x + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3.$
c) $3x^2 + 3x(\delta x) + (\delta x)^2.$

10. *a*) $2x^2 + 4hx + 2h^2.$ *b*) $4hx + 2h^2.$ *c*) $4x + 2h.$

Capítulo 2

1. *a*) 0. *b*) Valores menores que 1.
c) $1,\ 1{,}25,\ 2,\ 5,\ 10,\ -2,\ -1,\ -\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{3}.$ *d*) Infinito.

e) La gráfica es una hipérbola similar a la de la figura 2.3, pero el eje de las y está en $x = 1$.

2. *a*) 3,1, 3,01, 3,001, 3,000001. *b*) 3.

3. *a*) 5. *b*) Infinito.

4. *a*) 11, 5, 3, 2,5, 2,1, 2,01. *b*) 2.

5. 1. **6.** 2. **7.** $3x^2$. **8.** $\frac{1}{2}$. **9.** $\frac{4}{3}$.

Capítulo 3

1. 1,5; 1,2.

2. *a*) 2,5. *b*) $-0{,}8$. *c*) $-\frac{b}{a}$.

3. $y = 1{,}2x + 4$.

4. $\delta s = 9{,}8t(\delta t) + 4{,}9(\delta t)^2$; $\frac{\delta s}{\delta t} = 9{,}8t + 4{,}9(\delta t)$.

a) 20,58. *b*) 20,09. *c*) 19,649.
d) 19,6049; la velocidad es 19,60 ms^{-1}. **5.** 6.

6. $\delta y = 3x^2(\delta x) + 3x(\delta x)^2 + (\delta x)^3$. $\frac{\delta y}{\delta x} = 3x^2 + 3x(\delta x) + (\delta x)^2$; 12.

7. $\delta y = \frac{-\delta x}{x^2 + x\delta x}$; $\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{1}{x^2 + x\delta x}$; pendiente $= -1$; ángulo $= 135°$.

8. *a*) 2. *b*) 2. **9.** *a*) 12. *b*) 8.

Capítulo 4

1. $7x^6$; 5; $\frac{1}{3}$; 0,06; $\frac{5}{4}x^4$; $60x^3$; $4x^5$; $4{,}5x^2$; $32x$.

2. $4bx^3$; $\frac{6ax^5}{b}$; apx^{p-1}; $2ax^{2a-1}$; $2(2b+1)x^{2b}$; $8\pi x$.

3. 6; 0,54; -3; p.

4. $\frac{1}{2}x^2$; $\frac{3}{2}x^2$; $\frac{1}{3}x^3$; $\frac{1}{12}x^3$; $\frac{1}{6}x^6$; $\frac{x^{n+1}}{n+1}$; $\frac{x^{2a+1}}{2a+1}$; $\frac{x^4}{6}$; $\frac{4}{3}ax^3$.

5. a. **6.** $20t$. **7.** $2\pi r$. **8.** $4\pi r^2$.

9. $\frac{5}{2\sqrt{x}}$; $-\frac{5}{x^2}$; $-\frac{5}{2x^{3/2}}$; $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; $\frac{3}{4}\sqrt[4]{\frac{2}{x}}$.

10. $\frac{0{,}4}{x^{0{,}6}}$; $\frac{1{,}6}{x^{0{,}8}}$; $-\frac{1{,}6}{x^{1{,}2}}$; $\frac{-24}{x^5}$; $-\frac{p}{x^{p+1}}$.

11. $19{,}2x^{2{,}2}$; $\frac{-3}{x^{2{,}5}}$; $\frac{20{,}3}{x^{0{,}3}}$; $-\frac{18}{5x^{8/5}}$. **12.** $-\frac{40}{v^3}$. **13.** 1,5; 0.

14. 24. **15.** $-0{,}02$, $-0{,}5$, -2, -8. **16.** $-\frac{2}{x^3}$.

17. $x = 1$. **18.** $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **19.** $x = \frac{1}{16}$. **20.** $x = \frac{1}{2}$.

Capítulo 5

1. $12x + 5$. **2.** $9x^2 + 1$. **3.** $16x^3 + 6x - 1$.

4. $x + \frac{1}{7}$. **5.** $-\frac{5}{x^2} + 4$. **6.** $-\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x^3}$.

7. $5 - 2x + 9x^2$. **8.** $\frac{4}{\sqrt{x}}$. **9.** $u + at$.

10. $5 + 32t$. **11.** $6t - 4$. **12.** $3ax^2 + 2bx + 0$.

13. $2x - \frac{2}{x^3}$. **14.** $\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$. **15.** $3(1 + x)^2$.

16. $2nx^{2n-1} - 2nx$. **17.** $\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{2}{x^2}$.

18. 3; $x = \frac{3}{4}$. **19.** $x = +2$ ó -2.

20. 2, -1, 2. **21.** $x = +1$ o $x = -1$.

22. $12x + 5$. **23.** $\frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$. **24.** $9x^2 + 2x - 10$.

25. $8x^3 + 10x$. **26.** $12x^3 + 33x^2 - 8x$. **27.** $3x^2$.

28. $3x^2$. **29.** $4x^3 + 12x^2 + 6x - 8$. **30.** $4x^3$.

31. $4x^3 - 2x + 2$. **32.** $3x^2$. **33.** $24x^3 + 6x^2 - 22x - 3$.

34. $4x^3$. **35.** $18x^2 + 26x + 9$.

36. $(2ax + b)(px + q) + p(ax^2 + bx + c)$.

37. $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2x - 1)(x^2 + x + 1) + 2\sqrt{x}(x^2 + x + 1) + \sqrt{x}(2x - 1)(2x + 1)$.

38. $3\sqrt{x}(\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x} - 1) + x(2\sqrt{x} + 1)$.

39. $\frac{-6}{(2x - 1)^2}$. **40.** $\frac{6x}{(1 - 3x^2)^2}$. **41.** $\frac{2}{(x + 2)^2}$.

42. $\frac{1}{(x + 2)^2}$. **43.** $\frac{11}{(2x + 3)^2}$. **44.** $\frac{-2b}{(x - b)^2}$.

45. $\frac{2b}{(x + b)^2}$. **46.** $\frac{x^2 - 8x}{(x - 4)^2}$. **47.** $\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}$.

48. $\frac{1 - x}{2\sqrt{x}(x + 1)^2}$. **49.** $\frac{x - 1}{2x^{3/2}}$. **50.** $\frac{-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)^2}$.

51. $\frac{6x^2}{(x^3 + 1)^2}$. **52.** $\frac{-2x^2 + 2}{(x^2 - x + 1)^2}$. **53.** $\frac{5x^2 - 10x}{(3x^2 + x - 1)^2}$.

54. $\frac{x^2 - 1}{x^2}$. **55.** $\frac{4x^3(2a^2 - x^2)}{(a^2 - x^2)^2}$. **56.** $\frac{-5}{(2 - 3x)^2}$.

57. $\frac{x^2 - 4x + 2}{x^2 - 4x + 4}$. **58.** $\frac{-(x + 3x^{1/2})}{x^3}$.

59. $4(2x + 5)$; $-20(1 - 5x)^3$; $(3x + 7)^{-2/3}$.

60. $\frac{2}{(1 - 2x)^2}$; $-4(1 - 2x)$; $\frac{-1}{\sqrt{1 - 2x}}$.

61. $10x(x^2 - 4)^4$; $-3x\sqrt{1 - x^2}$; $\frac{3x}{\sqrt{3x^2 - 7}}$.

62. $\frac{4x}{(1 - 2x^2)^2}$; $\frac{-2x}{\sqrt{1 - 2x^2}}$; $\frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

63. $\frac{1}{(4 - x)^2}$; $\frac{1}{2(4 - x)^{3/2}}$; $\frac{2}{(4 - x)^3}$.

64. $\frac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$; $\frac{-x}{(x^2 - 1)^{3/2}}$; $\frac{1}{(1 + x^2)^{3/2}}$.

65. $\frac{x}{(1 - x^2)^{3/2}}$; $\frac{1}{2\sqrt{x(1 - x)^3}}$; $\frac{-1}{(1 + x)^{3/2}(1 - x)^{1/2}}$.

66. $\dfrac{1-x-x^2}{(1+x)\sqrt{1-x^2}};\ \dfrac{2x}{3(x^2+1)^{3/2}}$. **67.** $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}};\ \dfrac{-x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$.

68. $\dfrac{2x-1}{2\sqrt{1-x+x^2}};\ -4nx(1-2x^2)^{n-1}$.

69. $\dfrac{x(2a^2-x^2)}{(a^2-x^2)^{3/2}};\ 2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

70. $\dfrac{-3x^2}{2(1+x^3)^{3/2}};\ \dfrac{-(1+x)}{x^2\sqrt{1+2x}}$. **71.** $\dfrac{1}{(1+x^2)^{3/2}};\ \dfrac{-1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$.

72. $\dfrac{-4x+3}{2(2x^2-3x+4)^{3/2}};\ \dfrac{4x-5x^2}{2\sqrt{1-x}}$.

73. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{1-x^2}};\ \dfrac{3(x+1)}{\sqrt{2x+3}}$.

74. $\dfrac{-6x-7y}{7x+18y}$. **75.** $-\dfrac{2x(x^2+y^2)-x}{2y(x^2+y^2)+y}$.

76. $-\dfrac{x^2-y}{y^2-x}$. **77.** $-\dfrac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$.

78. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-2x+3}{2y+4}=1/6$ en $(1,1)$.

79. $x(3x-2);\ 2(3x-1);\ 6$.

80. $2bx^{2b-1};\ 2b(2b-1)x^{2b-2};\ 2b(2b-1)(2b-2)x^{2b-3}$.

81. $20x^3-9x^2+4x-1;\ 60x^2-18x+4;\ 120x-18$.

82. $50x^4-12x^2+5;\ 200x^3-24x;\ 600x^2-24$.

83. $-\dfrac{1}{x^2};\ \dfrac{2}{x^3};\ -\dfrac{6}{x^4}$. **84.** $\dfrac{1}{2x^{1/2}};\ -\dfrac{1}{4x^{3/2}};\ \dfrac{3}{8x^{5/2}}$.

85. $\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}};\ \dfrac{-1}{\sqrt{(2x+1)^3}};\ \dfrac{3}{\sqrt{(2x+1)^5}}$.

86. $-\dfrac{2}{x^3};\ \dfrac{6}{x^4};\ -\dfrac{24}{x^5}$.

87. $\dfrac{n!}{2a}\left[\dfrac{1}{(a-x)^{n+1}}+\dfrac{(-1)^n}{(a+x)^{n+1}}\right]$.

88. $-5;\ \dfrac{5}{12}$; el punto más bajo de la curva.

89. -7; 2; 0 y $\frac{10}{3}$.

90. $x = 3$, $x = 2$; $2{,}5$; $-0{,}25$ (el punto más bajo de la curva).

Capítulo 6

1. $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$; -4, -2, 2, 4; $x = 1$; $\frac{d^2y}{dx^2}$ es positivo; el punto es un mínimo.

2. $\frac{dy}{dx} = 3 - 2x$; 3, 1, -1, -3; $1{,}5$; negativo; máximo.

3. *a*) $x = \frac{1}{4}$; mínimo. *b*) $x = \frac{1}{3}$; máximo.

c) $x = -2$; mínimo. *d*) $x = -\frac{1}{4}$; mínimo.

4. *a*) Valor mínimo -16, $x = 2$; valor máximo $+16$, $x = -2$.

b) Valor máximo 5, $x = 1$; valor mínimo 4, $x = 2$.

c) Valor máximo 12, $x = 0$; valor mínimo -20, $x = 4$.

d) Valor máximo 41, $x = -2$; valor mínimo $9\frac{3}{4}$, $x = \frac{1}{2}$.

e) Valor máximo 2, $x = 3$; valor mínimo -2, $x = 1$.

5. Valor máximo 4, $x = 0$; valor mínimo 0, $x = 2$.

6. Valor máximo -4, $x = -\frac{1}{2}$; valor mínimo 4, $x = \frac{1}{2}$.

7. 5, 5. **8.** $\frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$; $\frac{u^2 \operatorname{sen} 2\theta}{2g}$. **9.** Altura = Diámetro.

10. $2{,}52$ m; profundidad, $1{,}26$ m. **11.** $s = 3 + 4{,}8t - 1{,}6t^2$; $6{,}6$.

12. $4{,}5$. **13.** $4{,}42$ cm (aprox.).

14. $1{,}5$ m de altura; $0{,}5$ m de anchura.

15. *a*) $x = -3$. *b*) $x = 2$. *c*) $x = -\frac{1}{2}$.

16. Máx. = $+0{,}385$; mín. = $-0{,}385$; pendiente = -1.

17. $x = 0$. **18.** Altura = $734{,}69$; tiempo = $12{,}24$.

19. Centro de la viga.

Capítulo 7

1. $3\cos x$.

2. $3\cos 3x$.

3. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

4. $\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{3}$.

5. $0{,}6\sec 0{,}6x\operatorname{tg}0{,}6x$.

6. $-\frac{1}{6}\operatorname{cosec}\frac{x}{6}\operatorname{ctg}\frac{x}{6}$.

7. $2(\cos 2x - \operatorname{sen} 2x)$.

8. $3(\cos 3x + \operatorname{sen} 3x)$.

9. $\sec x(\operatorname{tg} x + \sec x)$.

10. $4\cos 4x - 5\operatorname{sen} 5x$.

11. $-\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\cos\frac{1}{4}\theta$.

12. $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

13. $\operatorname{sen}(3\pi - x)$.

14. $\frac{1}{2}\operatorname{cosec}\left(a - \frac{1}{2}x\right)\operatorname{cotg}\left(a - \frac{1}{2}x\right)$.

15. $3\operatorname{sen}^2 x\cos x$.

16. $3x^2\cos x^3$.

17. $-6\cos^2(2x)\operatorname{sen}(2x)$.

18. $2x\sec(x^2)\operatorname{tg}(x^2)$.

19. $\dfrac{-\sec^2(\sqrt{1-x})}{2\sqrt{1-x}}$.

20. $n(a\cos nx - b\operatorname{sen} nx)$.

21. $a\operatorname{sen} x$.

22. $\sec^2\frac{x}{2}$.

23. $-2\operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.

24. $2\sec^2 2x - 2\operatorname{tg} x\sec^2 x$.

25. $2x + \frac{3}{2}\cos\frac{1}{2}x$.

26. $\frac{a}{x^2}\operatorname{sen}\frac{a}{x}$.

27. $\operatorname{sen} x + x\cos x$.

28. $\dfrac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$.

29. $x\sec^2 x + \operatorname{tg} x$.

30. $\dfrac{\operatorname{tg} x - x\sec^2 x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

31. $\dfrac{x\sec^2 x - \operatorname{tg} x}{x^2}$.

32. $2\cos 2x + 8x\cos(2x)^2$.

33. $-6x\cos^2(x^2)\operatorname{sen}(x^2)$.

34. $2x\operatorname{tg} x + x^2\sec^2 x$.

35. $-5\operatorname{cosec}^2(5x + 1)$.

36. $-6\operatorname{cotg} 3x\operatorname{cosec}^2 3x$.

37. $-\dfrac{\operatorname{sen} x}{2\sqrt{\cos x}}$.

38. $2(\cos^2 2x - \operatorname{sen}^2 2x)$.

39. 0.

40. $4 \operatorname{sen} x \cos x$.

41. $\dfrac{\operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$.

42. $\dfrac{2 \operatorname{sen} x}{(1+\cos x)^2}$.

43. $\dfrac{\operatorname{sen} x - 2x \cos x}{2\sqrt{x}\operatorname{sen}^2 x}$.

44. $2x(\cos 2x - x \operatorname{sen} 2x)$.

45. $\dfrac{2x(\cos 2x + x \operatorname{sen} 2x)}{\cos^2 2x}$.

46. $\operatorname{sen} x + \cos x$.

47. $\dfrac{2 \operatorname{sen} x + x \cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$.

48. $\dfrac{\operatorname{sen} x \cos x(2+\operatorname{sen} x)}{(1+\operatorname{sen} x)^2}$.

49. $\dfrac{\sec^2 x}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$.

50. $\sec x(2\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)$.

51. Máx., $x = \dfrac{\pi}{6}$; mín., $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

52. Máx., $x = \dfrac{\pi}{4}$.

53. Máx., $x = \dfrac{\pi}{3}$.

54. Máx., $x = \dfrac{\pi}{4}$.

55. Máx., $x = \operatorname{tg}^{-1} 2$.

56. Máx., 14° 29′ y 165° 31′; mín., 90°.

57. Máx., $x = \dfrac{2}{3}\pi$; mín., $x = \dfrac{4}{3}\pi$.

58. Máx. cuando $\operatorname{sen} x = +\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; mín., cuando $x = 0°$.

59. 33° 42′ (aprox.).

60. Mín. -1 cuando $x = \dfrac{\pi}{4}$.

61. *a)* $\dfrac{4}{\sqrt{1-16x^2}}$. *b)* $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

62. *a)* $\dfrac{-b}{\sqrt{a^2-x^2}}$. *b)* $\dfrac{-1}{\sqrt{9-x^2}}$.

63. *a)* $\dfrac{a}{a^2+x^2}$. *b)* $\dfrac{-1}{1+(a-x)^2}$.

64. *a)* $\dfrac{-4x}{\sqrt{1-4x^4}}$. *b)* $\dfrac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

65. *a)* $f'(x) = \operatorname{sen}^{-1} x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. *b)* $-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

66. *a)* $\dfrac{3}{\sqrt{6x-9x^2}}$. *b)* $\dfrac{-2}{x\sqrt{x^2-4}}$.

67. *a)* $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$. *b)* $2x \operatorname{tg}^{-1} x + 1$.

68. *a)* $\dfrac{-1}{2(2-x)\sqrt{1-x}}$. *b)* $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

69. *a)* $\dfrac{1}{x\sqrt{25x^2-1}}$. *b)* $\dfrac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$.

70. *a)* 1. *b)* $\dfrac{1}{2}\sqrt{1+\operatorname{cosec} x}$.

71. *a)* $\dfrac{2}{x\sqrt{a^2x^2-1}}$. *b)* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$.

72. *a)* $\dfrac{2}{1+x^2}$. *b)* $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

73. *a)* $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$. *b)* $\dfrac{-2}{x^2+1}$.

74. *a)* $\dfrac{1}{1+x^2}$. *b)* $\dfrac{2}{\sqrt{1-x^2}}$.

75. *a)* $f'(x) = \operatorname{tg}^{-1} x + \dfrac{x}{1+x^2}$. *b)* $\sec^2 x \operatorname{sen}^{-1} x + \dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Capítulo 8

1. *a)* $5e^{5x}$. *b)* $\dfrac{1}{2}e^{x/2}$. *c)* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$.

2. *a)* $-2e^{-2x}$. *b)* $-\dfrac{5}{2}e^{-5x/2}$. *c)* $-2e^{5-2x}$.

3. *a)* $-pe^{-px}$. *b)* $\dfrac{1}{a}e^{x/a}$. *c)* ae^{ax+b}.

4. a) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$. b) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$. c) $2xe^{x^2}$.

5. a) $(x + 1)e^x$. b) $(1 - x)e^{-x}$. c) $xe^{-x}(2 - x)$.

6. a) $e^x(x + 5)$. b) $e^x(\operatorname{sen} x + \cos x)$. c) $10e^x$.

7. a) $2^x \ln 2$. b) $\frac{2 \times 10^{2x}}{0{,}4343}$. c) $\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$.

8. a) $x^{n-1}a^x(n + x \ln a)$. b) $2a^{2x+1} \ln a$. c) $-\operatorname{sen} x e^{\cos x}$.

9. a) $2bxa^{bx^2} \ln a$. b) $(a + b)^x \ln (a + b)$. c) $e^{\operatorname{tg} a} \sec^2 x$.

10. a) $\frac{1}{x}$. b) $\frac{2ax + b}{ax^2 + bx + e}$.

11. a) $\frac{2}{x}$. b) $\frac{3x^2}{x^3 + 3}$.

12. a) $1 + \ln x$. b) $\frac{p}{px + q}$.

13. a) $\operatorname{ctg} x$. b) $-\operatorname{tg} x$.

14. a) $\frac{2a}{a^2 - x^2}$. b) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

15. a) $\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$. b) $\frac{1}{2(1 + \sqrt{x})}$.

16. a) $\frac{1}{\operatorname{sen} x}$. b) $\frac{x}{x^2 + 1}$. c) $\frac{e^x(2x - 1)}{2x^{3/2}}$.

17. a) $2xe^{4x}(1 + 2x)$. b) $-ake^{-kx}(\operatorname{sen} kx - \cos kx)$.

18. a) $\frac{e^{ax}(2ax - 1)}{2x^{3/2}}$. b) $\frac{1}{2}\operatorname{ctg} x$.

19. a) $x^x(1 + \ln x)$. b) $\frac{1}{2\sqrt{x^2 - 1}}$.

20. a) $\frac{1}{1 + e^x}$. b) $\cos x(1 + \ln \operatorname{sen} x)$.

21. a) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}(a - x)}$. b) $e^{ax} \operatorname{sen} x(2 \cos x + a \operatorname{sen} x)$.

22. *a*) $6xa^{3x^2}\ln a$. *b*) $\dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$.

23. *a*) $\dfrac{1}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$. *b*) $\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-2x}}}$.

24. *a*) $e^{ax}[a\cos(bx+c) - b\operatorname{sen}(bx+c)]$.

b) $-e^{-ax}(a\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x)$.

c) $-e^{-(1/2)x}\left[\dfrac{1}{2}\operatorname{sen}\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right) - \pi\cos\left(\pi x + \dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

25. *a*) $\dfrac{-a}{x\sqrt{a^2 - x^2}}$. *b*) $\dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.

26. *a*) a^2e^{ax}, a^3e^{ax}, a^4e^{ax}, a^ne^{ax}.

b) a^2e^{-ax}, $-a^3e^{-ax}$, e^4e^{-ax}, $(-1)^na^ne^{-ax}$.

c) $-\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1\times 2}{x^3}$, $-\dfrac{1\times 2\times 3}{x^4}$, $\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Capítulo 9

1. *a*) $\dfrac{1}{2}\operatorname{Ch}\dfrac{x}{2}$. *b*) $2\operatorname{Ch} 2x$. *c*) $\dfrac{1}{3}\operatorname{Sh}\dfrac{x}{3}$.

2. *a*) $a\operatorname{Sech}^2 ax$. *b*) $\dfrac{1}{4}\operatorname{Sech}^2\dfrac{x}{4}$. *c*) $a(\operatorname{Cosh} ax + \operatorname{Sh} ax)$.

3. *a*) $-\dfrac{1}{x^2}\operatorname{Ch}\dfrac{1}{x}$. *b*) $\operatorname{Sh} 2x$. *c*) $3\operatorname{Ch}^2 x\operatorname{Sh} x$.

4. *a*) $a\operatorname{Ch}(ax+b)$. *b*) $4x\operatorname{Sh} 2x^2$. *c*) $na\operatorname{Sh}^{n-1} ax\operatorname{Ch} ax$.

5. *a*) $\operatorname{Ch} 2x$. *b*) $2\operatorname{Sh} 2x$. *c*) $2\operatorname{Th} x\operatorname{Sech}^2 x$.

6. *a*) $\dfrac{2}{\operatorname{Sh} 2x}$. *b*) $x\operatorname{Ch} x$. *c*) $\operatorname{Th} x$.

7. *a*) $3x^2\operatorname{Sh} 3x + 3x^3\operatorname{Ch} 3x$. *b*) 1. *c*) $\operatorname{Ch} xe^{\operatorname{Sh} x}$.

8. *a*) $\dfrac{\operatorname{Ch} x}{2\sqrt{\operatorname{Sh} x}}$. *b*) 2. *c*) $\operatorname{Sech}^2 xe^{\operatorname{Th} x}$.

9. *a*) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$. *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-25}}$. *c*) $\dfrac{-2}{(1+x)\sqrt{2(1+x^2)}}$.

10. *a*) $\sec x$. *b*) $\operatorname{Sech} x$. *c*) $\sec x$.

11. *a*) Sech x. *b*) sec x. *c*) $\dfrac{2}{1-x^2}$.

12. *a*) $\dfrac{2}{\sqrt{2x(2x+1)}}$. *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. *c*) $\dfrac{-1}{x(x+2)}$.

13. *a*) $\dfrac{2}{1-x^4}$. *b*) $\dfrac{1}{2}\sec x$. *c*) $\dfrac{1}{2}\operatorname{Sech} x$.

14. *a*) $\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$. *b*) $\ln\left(\dfrac{x+\sqrt{x^2-9}}{3}\right)$.

c) $\ln\left(\dfrac{2x+\sqrt{4x^2+9}}{3}\right)$. *d*) $\ln\left(\dfrac{3x+\sqrt{9x^2-4}}{2}\right)$.

e) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4+x}{4-x}$.

15. *a*) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$. *b*) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$. *c*) $\dfrac{a}{a^2-x^2}$.

Capítulo 10

En las siguientes respuestas no se muestra la constante de integración después de las primeras doce.

1. $\dfrac{3}{2}x^2+C$. **2.** $\dfrac{5}{3}x^3+C$. **3.** $\dfrac{1}{8}x^4+C$.

4. $0{,}08x^5+C$. **5.** $\dfrac{4}{3}x^9+C$. **6.** $5t^2+C$.

7. $\dfrac{1}{2}x+C$. **8.** $0+C$. **9.** $\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+x+C$.

10. $\dfrac{3}{5}x^5-\dfrac{5x^4}{4}+C$. **11.** $\dfrac{8}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^2+C$.

12. $\dfrac{6}{5}x^5+\dfrac{3}{2}x^4+C$. **13.** $\dfrac{1}{3}x^3-9x$. **14.** $\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{5}{2}x^2-12x$.

15. $-\dfrac{1}{x}$. **16.** $-\dfrac{1}{x^3}$. **17.** $-\dfrac{1}{0{,}4x^{0{,}4}}$.

18. $\frac{3}{4}x^{4/3}$. **19.** $\sqrt{x}$. **20.** $\frac{3}{2}x^{2/3}$.

21. $\frac{3}{2}x^{3/2} + 2x^{1/2}$. **22.** $\frac{3}{5}x^{5/3} + x + 3x^{1/3}$. **23.** $-\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

24. $\frac{\pi}{2}x - 10x^{0,5}$. **25.** gt. **26.** $-\frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x} + \ln x - x$.

27. $\frac{2}{3}t^{3/2}$. **28.** $x - \frac{1}{9}x^3 - x^{1/2}$. **29.** $1{,}4 \ln x$.

30. $\ln(x+3)$. **31.** $\frac{1}{a}\ln(ax+b)$. **32.** $\ln\frac{(x-1)^3}{(x-2)^4}$.

33. $\ln(x^2+4)$. **34.** $-\frac{1}{2}\ln(3-2x)$. **35.** $x + 3\ln x$.

36. $\frac{1}{3}x^3 - 7\ln x$. **37.** $\ln x + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$. **38.** $\frac{2}{3a}(ax+b)^{3/2}$.

39. $\frac{1}{3}(2x+3)^{3/2}$. **40.** $\frac{4}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{3/2}$. **41.** $\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}$.

42. $-2\sqrt{1-x}$. **43.** $\frac{1}{3a}(ax+b)^3$. **44.** $\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$.

45. $\frac{1}{2}\ln(x^2-1)$. **46.** $-\frac{1}{a}\ln(1+\cos ax)$.

47. $\frac{1}{3}\ln(e^{32}+6)$. **48.** $\frac{1}{2}\ln(2x + \text{sen}\, 2x)$.

49. $y = \frac{1}{4}x^4 + C_1x$. **50.** $y = 2x^3 + 3$.

51. $y = \frac{5}{6}x^3 + 2x - \frac{11}{6}$. **52.** $y = 2x^2 - 5x + 6$.

53. $y = 3x^3 - 5x^2 + 4x + 4$. **54.** $s = \frac{4}{3}t^3 + 8t + 10$.

55. $\frac{3}{2}e^{2x}$. **56.** $\frac{1}{3}e^{3x-1}$.

57. $\frac{1}{2}(e^{2x} - e^{-2x}) + 2x$. **58.** $ae^{x/a}$.

59. $2(e^{x/2} - e^{-x/2})$.

60. $\frac{1}{a}(e^{ax} + e^{-ax})$.

61. $\frac{1}{3}(e^{3x} + a^{3x}\ln e)$.

62. $2^x \log_2 e$.

63. $\frac{1}{3}10^{3x}\log_{10} e$.

64. $(a^x - a^{-x})\log_a e$.

65. $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

66. $-e^{\cos x}$.

67. $-\frac{1}{3}\cos 3x$.

68. $\frac{3}{5}\operatorname{sen} 5x$.

69. $-2\cos\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

70. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x + \alpha)$.

71. $-3\cos\frac{1}{3}x$.

72. $\frac{1}{3}\cos(\alpha - 3x)$.

73. $\frac{1}{a}\operatorname{sen} ax - \frac{1}{b}\cos bx$.

74. $-\frac{1}{2a}\cos 2ax$.

75. $\frac{1}{3}\operatorname{sen} 3x + 3\cos\frac{x}{3}$.

76. $\ln(x + \operatorname{sen} x)$.

77. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 x$.

78. **24.** $e^{\operatorname{tg} x}$.

79. $\frac{1}{a}\ln\sec ax + \frac{1}{b}\ln\operatorname{sen} bx$.

80. $\ln(1 + \operatorname{sen}^2 x)$.

81. $\frac{1}{2}\operatorname{Sh} 2x$.

82. $\frac{2}{a}\operatorname{Ch}\frac{a}{2}x$.

83. $\frac{1}{3}\ln\operatorname{Ch} 3x$.

84. $\frac{1}{b}[\operatorname{sen}(a - bx) - \cos(a + bx)]$.

85. $\frac{2}{3}e^{3x/2} + 4e^{x/2} - 2e^{-x/2}$.

86. $\frac{2}{3}\ln\sec\frac{3x}{2}$.

87. $3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$.

88. $\ln(1 + e^x)$.

89. $\ln(1 + \operatorname{tg} x)$.

90. $\frac{2}{3}(\operatorname{sen} x)^{3/2}$.

91. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3}$. *b*) $\operatorname{Ch}^{-1}\frac{x}{3}$ o $\ln(x+\sqrt{x^2-9})$.

c) $\operatorname{Sh}^{-1}\frac{x}{3}$ o $\ln(x+\sqrt{x^2+9})$.

92. *a*) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{3}$. *b*) $\frac{1}{3}\operatorname{Th}^{-1}\frac{x}{3}$ o $\frac{1}{6}\ln\frac{3+x}{3-x}$.

c) $-\frac{1}{3}\operatorname{Ctgh}^{-1}\frac{x}{3}$ o $\frac{1}{6}\ln\frac{x-3}{x+3}$.

93. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{4}$. *b*) $\frac{1}{4}\operatorname{Th}^{-1}\frac{x}{4}$ o $\frac{1}{8}\ln\frac{4+x}{4-x}$.

94. *a*) $\operatorname{Ch}^{-1}\frac{x}{4}$ o $\ln(x+\sqrt{x^2-16})$.

b) $-\frac{1}{4}\operatorname{Ctgh}^{-1}\frac{x}{4}$ o $\frac{1}{8}\ln\frac{x-4}{x+4}$.

95. *a*) $\operatorname{Sh}^{-1}\frac{x}{4}$ o $\ln(x+\sqrt{x^2+16})$. *b*) $\frac{1}{4}\operatorname{tg}^{-1}\frac{x}{4}$.

96. *a*) $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3x}{5}$.

b) $\frac{1}{3}\operatorname{Ch}^{-1}\frac{3x}{5}$ o $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2-25})$.

c) $\frac{1}{3}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{3x}{5}$ o $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2+25})$.

97. *a*) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{2x}{3}$. *b*) $\frac{1}{6}\operatorname{Th}^{-1}\frac{2x}{3}$ o $\frac{1}{12}\ln\frac{3+2x}{3-2x}$.

c) $-\frac{1}{6}\operatorname{Ctgh}^{-1}\frac{2x}{3}$ o $\frac{1}{12}\ln\frac{2x-3}{2x+3}$.

98. *a*) $\frac{1}{6}\operatorname{tg}^{-1}\frac{3x}{2}$. *b*) $\frac{1}{3}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{3x}{2}$ o $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2+4})$.

c) $\frac{1}{3}\operatorname{Ch}^{-1}\frac{3x}{2}$ o $\frac{1}{3}\ln(3x+\sqrt{9x^2-4})$.

99. *a*) $\frac{1}{7}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{7x}{5}$ o $\frac{1}{7}\ln(7x+\sqrt{49x^2+25})$.

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{Sh}^{-1}\sqrt{\frac{2}{5}}x$ o $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(x\sqrt{2}+\sqrt{2x^2+5})$.

100. *a*) $\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}$. *b*) $\frac{1}{10}\operatorname{Th}^{-1}\frac{2x}{5}$.

101. *a*) $\frac{1}{2}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}$ o $\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{5+4x^2})$. *b*) $\frac{1}{2}\operatorname{Th}^{-1}\frac{2x}{5}$.

102. *a*) $\frac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{\sqrt{7}x}{6}$ o $\frac{1}{\sqrt{7}}\ln(\sqrt{7}x+\sqrt{7x^2+36})$.

b) $-\operatorname{Cosech}^{-1}x$ o $-\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$.

103. *a*) $\frac{1}{2}\sec^{-1}\frac{x}{2}$.

b) $-\frac{1}{2}\operatorname{Cosech}^{-1}\frac{x}{2}$ o $-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{x^2+4}}{x}\right)$.

104. *a*) $-\frac{1}{2}\operatorname{Sech}^{-1}\frac{x}{2}$ o $-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2+\sqrt{4-x^2}}{x}\right)$.

b) $\operatorname{Ch}^{-1}\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sec^{-1}\frac{x}{3}$.

Capítulo 11

1. $\frac{1}{2}(x-\operatorname{sen}x)$.

2. $\frac{1}{2}(x+\operatorname{sen}x)$.

3. $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-x$.

4. $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}+\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x\right)$.

5. $\frac{1}{4}\left(\frac{3x}{2}-\operatorname{sen}2x+\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x\right)$.

6. $-\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}2x+x)$.

7. $\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}\operatorname{sen}4x$.

8. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}\operatorname{sen}6x$.

9. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4a}\operatorname{sen}2(ax+b)$.

10. $-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x$.

11. $\frac{1}{12}\operatorname{sen}3x+\frac{3}{4}\operatorname{sen}x$.

12. $\frac{1}{2}\left(\operatorname{sen}x-\frac{1}{5}\operatorname{sen}5x\right)$.

13. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}\left(2x+\frac{1}{2}\operatorname{sen}4x\right)$.

14. $-\frac{1}{4}\left(\cos 2x+\frac{1}{3}\cos 6x\right)$.

15. $-\left(\frac{1}{11}\cos\frac{11x}{2}+\frac{1}{5}\cos\frac{5x}{2}\right)$.

16. $-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(a+b)x}{a+b}+\frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right]$.

17. $-\frac{1}{4}\cos 2\theta$.

18. $\frac{1}{8}\left(x-\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x\right)$.

19. $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$.

20. $2\operatorname{tg}x-x$.

21. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\sec x$.

22. $-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2x-x+\frac{1}{4}\operatorname{sen}4x\right)$.

23. $2\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$.

24. $\operatorname{tg}x+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

25. $\frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3}+\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2}$.

26. $\frac{25}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{5}+\frac{x\sqrt{25-x^2}}{2}$.

27. $\frac{1}{4}\operatorname{sen}^{-1}2x+\frac{x}{2}\sqrt{1-4x^2}$.

28. $\frac{9}{4}\operatorname{sen}^{-1}\frac{2x}{3}+\frac{x}{2}\sqrt{9-4x^2}$.

29. $\frac{x\sqrt{x^2-4}}{2}-2\ln\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$.

30. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-25}-\frac{25}{5}\ln\frac{x+\sqrt{x^2-25}}{5}$.

31. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+49}+\frac{49}{2}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{x}{7}$.

32. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+5}+\frac{5}{2}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{x}{\sqrt{5}}$.

33. $\frac{3}{5}\operatorname{Sh}^{-1}\frac{5x}{4}+\frac{1}{2}x\sqrt{25x^2+16}$.

34. $\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-3}-\frac{3}{2}\operatorname{Ch}^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}$.

35. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

38. $-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x}$.

39. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\operatorname{sen}^{-1}x$.

40. $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

41. $2 \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{4}$.

42. $2 \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{4}\right)$.

43. $\dfrac{1}{3} \ln \operatorname{tg} \dfrac{3x}{2}$.

44. $\ln \operatorname{tg} x$.

45. $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$.

46. $\operatorname{tg} x - \sec x$.

47. $\operatorname{tg} x + \sec x$.

48. $\ln \dfrac{1}{1-\operatorname{sen} x}$.

49. $\dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left(\dfrac{1}{2} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$.

50. $\dfrac{1}{2} \operatorname{tg}^{-1}\left(2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$.

51. $\dfrac{2}{3} \operatorname{Th}^{-1}\left(\dfrac{1}{3} \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}\right)$.

52. $\dfrac{1}{3} \ln\left(\dfrac{\operatorname{tg} \dfrac{x}{2}-2}{2 \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}-1}\right)$.

53. $\dfrac{1}{3} \operatorname{sen} x^3$.

54. $\dfrac{1}{6} \ln \dfrac{1}{1-2x^3}$.

55. $\sqrt{1+x^2}$.

56. $-\dfrac{2}{5}\sqrt{2-5x}$.

57. $-2 \cos \sqrt{x}$.

58. $\dfrac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$.

59. $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1}{1+2\cos x}$.

60. $\dfrac{1}{2}(\ln x)^2$.

61. $\dfrac{1}{3}(5+x^2)^{3/2}$.

62. $\operatorname{tg}^{-1} x^2$.

63. $\dfrac{1}{30}(x-2)^5(5x+2)$.

64. $\ln(x+1)+\dfrac{4x+3}{2(x+1)^2}$.

65. $\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{x-1}$.

66. $\dfrac{2}{15}(3x+2)(x-1)^{3/2}$.

67. $-\sqrt{5-x^2}$.

68. $\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{x^2-1}$.

69. $\frac{3}{14}(x-2)^{4/3}(2x+3)$.

70. $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2+6x-11)+\ln(x-1)$.

71. $\frac{1}{15}(3x^2+4)(x^2-2)$.

72. $2[\sqrt{x}+3\ln(\sqrt{x}-3)]$.

73. $2\left[\frac{1}{2}x-\sqrt{x}+\ln(\sqrt{x}+1)\right]$.

74. $2\left[\frac{x\sqrt{x}}{3}-\frac{x}{2}+\sqrt{x}-\ln(\sqrt{x}+1)\right]$.

75. $\frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x$.

76. $\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 x-\frac{2}{5}\cos^5 x+\frac{1}{7}\operatorname{sen}^7 x$.

77. $\frac{3}{8}(x^2-3)(x^2+1)^{1/3}$.

78. $\frac{1}{2e^x}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln(e^x-2)$.

79. $\frac{1}{45}(1+2x^3)^{3/2}(3x^3-1)$.

80. $-\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

81. $\frac{-(1-x^2)^{3/2}}{3x^3}$.

82. $\frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2}$.

83. $\operatorname{sen} x-x\cos x$.

84. $\frac{1}{9}\operatorname{sen} 3x-\frac{1}{3}x\cos 3x$.

85. $(x^2-2)\operatorname{sen} x+2x\cos x$.

86. $x(x^2-6)\operatorname{sen} x+3(x^2-2)\cos x$.

87. $\frac{x^2}{2}\left(\ln x-\frac{1}{2}\right)$.

88. $\frac{x^3}{3}\left(\ln x-\frac{1}{3}\right)$.

89. $\frac{x^4}{4}\left(\ln x-\frac{1}{4}\right)$.

90. $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\ln x-\frac{2}{3}\right)$.

91. $e^x(x-1)$.

92. $e^x(x^2-2x+2)$.

93. $-e^{-ax}\left(\frac{ax+1}{a^2}\right)$.

94. $\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\operatorname{sen} 2x)$.

95. $x\cos^{-1}x-\sqrt{1-x^2}$.

96. $x\,\mathrm{tg}^{-1}x - \frac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

97. $\frac{1}{2}(x^2 + 1)\,\mathrm{tg}^{-1}x - \frac{1}{2}x$.

98. $\frac{1}{2}e^x(\mathrm{sen}\,x - \cos x)$.

99. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x\,\mathrm{sen}\,2x - \frac{1}{8}\cos 2x$.

100. $-\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\mathrm{sen}\,2x$.

101. $x\,\mathrm{tg}\,x - \ln\sec x$.

102. $x\,\mathrm{Ch}\,x - \mathrm{Sh}\,x$.

103. $\frac{x^3}{3}\mathrm{sen}^{-1}x + \frac{x^2 + 2}{9}\sqrt{1 - x^2}$.

104. $\frac{x^4}{4}\left[(\ln x)^2 - \frac{1}{2}\ln x + \frac{1}{8}\right]$.

Capítulo 12

1. $x - 2\ln(x + 2)$.

2. $-[x + \ln(1 - x)]$.

3. $\frac{1}{b^2}[a + bx - a\ln(a + bx)]$.

4. $x + 2\ln(x - 1)$.

5. $-x + 2\ln(x + 1)$.

6. $x - 2\ln(2x + 3)$.

7. $\frac{1}{2}x^2 - 2x + 4\ln(x + 2)$.

8. $-x - \frac{1}{2}x^2 + \ln(1 - x)$.

9. $\frac{1}{9}\left[\frac{3x^2}{2} + x + \frac{1}{3}\ln(3x - 1)\right]$.

10. $\frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a + bx)^2 - 2a(a + bx) + a^2\ln(a + bx)\right]$.

11. $3\left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4x - 8\ln(x + 2)\right]$.

12. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(x - 1)$.

13. $\frac{1}{2}\ln\frac{x - 1}{x + 1}$.

14. $\frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x}$.

15. $x + \ln\frac{x - 2}{x + 2}$.

16. $\frac{1}{12}\ln\frac{2x - 3}{2x + 3}$.

17. $3\ln(x + 2) - 2\ln(x + 4)$.

18. $2\ln(x+3)+\ln(x-2)$.

19. $\ln(2x+5)+3\ln(x-7)$.

20. $\frac{2}{5}\ln(x-1)-\frac{1}{15}\ln(3x+2)$.

21. $3\ln(x+1)-\frac{5}{4}\ln(4x-1)$.

22. $\ln(1-x)+\frac{2}{1-x}$.

23. $2\ln(x+2)+\frac{5}{x+2}$.

24. $\frac{1}{2}\ln(2x+3)+\frac{1}{2x+3}$.

25. $x+2\ln(x-4)-\ln(x+3)$.

26. $x+\frac{5}{3}\ln(x-2)-\frac{2}{3}\ln(x+1)$.

27. $x^2+2\ln(x+2)-\ln(x-3)$.

28. $\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln(x+1)-\ln(x-1)$.

29. $-\ln x+\frac{1}{2}\ln(x+1)+\frac{1}{2}\ln(x-1)$.

30. $\frac{1}{4}[\ln(x+2)-\ln x]-\frac{1}{2x}$.

31. $-\frac{3}{2}\ln x+\frac{5}{3}\ln(x-1)-\frac{1}{6}\ln(x+2)$.

32. $\frac{1}{2}\ln(x-1)+\frac{1}{5}\ln(x-2)+\frac{3}{10}\ln(x+3)$.

33. $-\frac{3}{25}\ln(x+2)+\frac{3}{25}\ln(x-3)-\frac{7}{5(x-3)}$.

34. $-\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}[\ln(x-1)-\ln(x+1)]$.

35. $-\ln x+2\ln(x-1)-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}$.

36. $\ln x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

37. $\frac{1}{5}\left[\ln(x-2)-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]-\frac{2}{5}\operatorname{tg}^{-1}x$.

38. $\frac{1}{10}[\ln(x^2+4) - 2\ln(x+1)] + \frac{2}{5}\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}.$

39. $\frac{3}{10}[\ln(x^2+4) - 2\ln(1-x)] - \frac{1}{5}\text{tg}^{-1}\frac{x}{2}.$

40. $\frac{1}{4}[\ln(x+1) + \ln(x-1) - \ln(x^2+1).$

41. $\frac{1}{4}[\ln(x-1) - \ln(x+1)] + \frac{1}{2}\text{tg}^{-1} x.$

42. $\ln x + 2\,\text{tg}^{-1} x.$

43. $\frac{1}{\sqrt{8}}\text{tg}^{-1}\frac{x+3}{\sqrt{8}}.$

44. $\frac{1}{2\sqrt{13}}\ln\frac{(x+3)+\sqrt{13}}{(x+3)+\sqrt{13}}.$

45. $\frac{1}{\sqrt{2}}\text{tg}^{-1}\frac{x+2}{\sqrt{2}}.$

46. $\frac{1}{\sqrt{13}}\text{tg}^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{13}}.$

47. $-\frac{1}{2}\ln(3x^2+4x+2) + \frac{3}{\sqrt{2}}\text{tg}^{-1}\frac{3x+2}{\sqrt{2}}.$

48. $2\ln(x^2-2x-1) - \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\frac{(x-1)-\sqrt{2}}{(x-1)+\sqrt{2}}.$

49. $\ln(x^2+4x+5) + \text{tg}^{-1}(x+2).$

50. $\frac{1}{3}\ln(x+1) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

51. $x - 2\ln(x^2+2x+2) + 3\,\text{tg}^{-1}(x+1).$

52. $-\frac{3}{2}\ln(1-2x-x^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+(1+x)}{\sqrt{2}-(1+x)}.$

53. $\frac{2}{3}\ln(3x^2+x+3) + \frac{26}{3\sqrt{35}}\text{tg}^{-1}\frac{6x+1}{\sqrt{35}}.$

54. $\frac{2}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\text{tg}^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$

55. $\text{Sh}^{-1}(x+3)$ o $\ln[(x+3) + \sqrt{x^2+6x+10}].$

56. $\text{Sh}^{-1}\frac{x+1}{\sqrt{3}}$ o $\ln[(x+1) + \sqrt{x^2+2x+4}].$

57. $\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{x-2}{\sqrt{2}}$ o $\ln[(x-2)+\sqrt{x^2-4x+2}]$.

58. $\mathrm{sen}^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{5}}$.

59. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{5x-6}{4}$.

60. $\mathrm{sen}^{-1}\dfrac{x-2}{2}$.

61. $\sqrt{x^2+1}$.

62. $\sqrt{x^2+1}+\mathrm{Sh}^{-1}x$.

63. $\sqrt{x^2-1}+\mathrm{Ch}^{-1}x$.

64. $\sqrt{x^2-x+1}+\dfrac{1}{2}\mathrm{Sh}^{-1}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

65. $2\sqrt{x^2-2x+5}-\mathrm{Sh}^{-1}\dfrac{x-1}{2}$.

66. $-3\,\mathrm{sen}^{-1}\dfrac{x+2}{\sqrt{7}}-2\sqrt{3-4x-x^2}$.

67. $2\sqrt{x^2+x+1}+2\,\mathrm{Sh}^{-1}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

68. $\sqrt{x^2+2x-1}+\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$.

69. $\sqrt{x^2-4}+2\,\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{x}{2}$.

70. $\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-9}+\dfrac{3}{2}\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{2x}{3}$.

71. $\sqrt{x(x+3)}-\dfrac{3}{2}\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{2x+3}{3}$.

72. $\dfrac{1}{2}\sqrt{2x^2-x-3}+\dfrac{5}{4\sqrt{2}}\mathrm{Ch}^{-1}\dfrac{4x-1}{5}$.

73. $\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{2}\mathrm{Ch}^{-1}x$.

74. $-\dfrac{1}{\sqrt{10}}\mathrm{Sh}^{-1}\dfrac{3x+10}{x}$.

75. $-\mathrm{Sh}^{-1}\left(\dfrac{x+2}{x\sqrt{3}}\right)$.

76. $-\mathrm{Ch}^{-1}\left(\dfrac{2x+1}{x}\right)$.

77. $-\mathrm{Sh}^{-1}\left[\dfrac{-x}{(x+1)\sqrt{2}}\right]$.

78. $-\text{Cosech}^{-1} x$ o $\ln\left(\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right)$.

79. $\sqrt{1+x^2} + \ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$. **80.** $-\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

81. $\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

82. $\dfrac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \dfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

83. $-\dfrac{2}{3}(x+2)\sqrt{1-x}$. **84.** $\ln\dfrac{\sqrt{x+2}-1}{\sqrt{x+2}+1}$.

85. $\ln\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$.

Capítulo 13

1. $\dfrac{3^{n+1}-1}{n+1}$. **2.** $4\dfrac{1}{3}$. **3.** $1\dfrac{5}{6}$.

4. 9. **5.** 2,925. **6.** $\dfrac{14}{3}$.

7. $\dfrac{28}{3}$. **8.** $\dfrac{1}{3}$. **9.** 0.

10. 0. **11.** 2,16 (aprox.).

12. $2(e-1) = 3{,}436$ (aprox.). **13.** $\dfrac{1}{4}\pi r^2$.

14. $\dfrac{8\pi\rho a^5}{15}$. **15.** $\dfrac{1}{\kappa}(e^{kb} - e^{ka})$. **16.** $\dfrac{\pi}{4}$.

17. $\ln\sqrt{2}$. **18.** 1. **19.** $-\dfrac{1}{4}$.

20. $-\dfrac{1}{9}$. **21.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **22.** $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2$.

23. $\dfrac{\pi}{2}$. **24.** $\dfrac{2}{9}(7\sqrt{7} - 8)$. **25.** $\dfrac{10}{3}$.

26. $4 - 2\ln 3$. **27.** $\frac{\pi}{2}$. **28.** $\frac{\pi}{4a}$.

29. $\frac{\pi}{2}$. **30.** 1. **31.** $\ln(2 + \sqrt{3})$.

32. 0,9379. **33.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **34.** $1 - \frac{\pi}{4}$.

35. $\operatorname{sen}^{-1}\frac{3}{4} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{1}{2}$. **36.** π. **37.** $-\frac{7}{288}$.

Nota: Cuando no se da respuesta, es que no existe un valor finito de la integral.

39. $\frac{1}{8}$. **40.** $\frac{\pi}{2}$. **41.** $\frac{1}{2}\ln 3$. **43.** 1.

44. $\frac{1}{2}$. **46.** $1 - \ln 2$. **47.** $\ln 2 - \frac{1}{2}$. **49.** $\frac{\pi}{2}$.

50. π. **51.** $-\frac{1}{4}$. **53.** 2. **54.** -1.

55. 2. **57.** 0.

Capítulo 14

1. $152\frac{1}{4}$. **2.** $36\frac{3}{4}$. **3.** 4,047 (aprox.).

4. $\frac{7}{3}$. **5.** $25\frac{1}{3}$. **6.** 4π.

7. 6,199 y 3,628 (los dos aprox.). **8.** 12π.

9. 4,982. **10.** $4\ln 2$. **11.** $\frac{4}{27}$.

12. $e^3 - 1$. **13.** $4\frac{1}{2}$. **14.** $25\frac{3}{5}$.

15. $\frac{3}{5} - 2\ln 2$.

16. Entre -2 y 0, área = 5(1/3); entre 0 y 3, área = 15(3/4).

17. $341\frac{1}{3}$. **18.** $\frac{1}{3}$. **19.** 2,3504.

20. 40.
21. $\frac{1}{32}$.
22. $\frac{3\pi a^2}{2}$.
23. $\frac{1}{8}\pi a^2$; 4.
24. $\frac{1}{2}a^2$; 2.
25. $\frac{4a^2\pi^3}{3}$.
26. $\frac{4a^2}{3}$.
27. $\frac{59\pi}{2}$.
28. 0,637 (aprox.).
29. 0,5.
30. 0,256.
31. $\frac{8}{3}$.
32. $\frac{b}{a}$.
33. $\frac{4}{\pi\sqrt{2}}$.
34. $\frac{2a}{\pi}$.
35. $\frac{2v_0^2}{\pi g}$.
36. 260 m^2.
37. 6,24 m^2.
38. 60,7 mm^2.
39. 1.437 m^2.
40. 73,5 m^2.

Capítulo 15

1. $\sqrt{5} + \frac{1}{2}\ln(2 + \sqrt{5})$.
2. $2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})$.
3. $\frac{335}{27}$.
4. $\frac{1}{2}\left[e - \frac{1}{e}\right]$.
5. $(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{2} - 1}$.
6. 1,732.
7. $2\pi a$.
8. $6{,}1a$.
9. $a\left[(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.
10. $\frac{3\pi a}{2}$.

Capítulo 16

1. *a*) $\frac{243\pi}{5}$. *b*) 8π.
2. *a*) $\frac{2.187\pi}{7}$. *b*) $\frac{96\pi}{5}$.

3. $\frac{\pi}{6}$. **4.** *a)* $\frac{20\pi}{3}$. *b)* $\frac{8\pi}{3}$.

5. $\frac{64\pi}{3}$. **6.** 32π. **7.** $\frac{4}{3}\pi a^3$. **8.** $\frac{384\pi}{7}$.

9. $\frac{\pi^2}{2}$. **10.** $\frac{16\pi}{15}$. **11.** $\frac{3\pi}{4}$. **12.** $\frac{96\pi}{5}$.

13. $\frac{135\pi}{16}$. **14.** $2\pi[\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2} + 1)]$. **15.** $\frac{208}{3}$.

16. $\frac{6\pi a^2}{5}$. **17.** $2\pi rh$. **18.** $\frac{\pi}{16}(\sqrt{1.000} - 1)$.

Capítulo 17

1. $\bar{x} = \frac{3}{5}b$; $\bar{y} = 0$. **2.** $\bar{x} = 3$; $\bar{y} = \frac{3}{4}\sqrt{10}$.

3. $\bar{x} = \frac{2}{5}$; $\bar{y} = \frac{4}{7}$. **4.** $\bar{x} = \frac{9}{8}$; $\bar{y} = \frac{27}{5}$.

5. $\frac{4r\sqrt{2}}{3\pi}$ desde el centro sobre el radio intermedio.

6. $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$; $\bar{y} = \frac{\pi}{8}$.

7. $\frac{2r}{\pi}$ desde el centro sobre el radio perpendicular al diámetro.

8. $\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$; $\bar{y} = \frac{2r}{\pi}$. **9.** $\frac{2}{3}\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$.

10. $\frac{3}{4}h$. **11.** $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$.

12. $\bar{x} = \frac{b - a}{\ln b - \ln a}$; $\bar{y} = \frac{\kappa^2(b - a)}{2ab(\ln b - \ln a)}$.

13. $\bar{x} = 2{,}5$; $\bar{y} = 0$. **14.** $\frac{4}{5}b$ desde 0.

15. $\frac{1}{3}Ml^2$; $\frac{l}{\sqrt{3}}$. **16.** $\frac{4}{3}Ma^2$. **17.** $\frac{1}{4}Mr^2$.

18. $\frac{1}{4}Mb^2$. **19.** *a)* $\frac{1}{6}Mh^2$. *b)* $\frac{1}{2}Mh^2$.

20. $\frac{3}{10}Mr^2$. **21.** $\frac{1}{2}Mr^2$. **22.** $\frac{1}{2}Ma^2$.

23. $\frac{3}{7}Mb^2$. **24.** $\frac{2}{5}Mr^2$; $r\sqrt{\frac{2}{5}}$.

25. $\frac{4}{3}Ma^2$. **26.** $\frac{2}{3}Ma^2$.

27. *a)* $\frac{1}{24}Ma^2$. *b)* $\frac{1}{12}Ma^2$. *c)* $\frac{5}{12}Ma^2$.

28. $\frac{3}{2}Ma^2$. **29.** $M\left(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{4}\right)$. **30.** $\frac{2}{3}Ma^2$.

31. $\frac{2}{5}Ma^2$. **32.** $\frac{3}{20}M(r^2+4h^2)$. **33.** $\frac{1}{4}M(a^2+b^2)$.

34. *a)* $\frac{16}{3}ab^3$. *b)* $\frac{8}{3}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}$. *c)* $\frac{16}{3}ab(a^2+b^2)$.

Capítulo 18

1. yx^{y-1}; $x^y \log_x e$.

2. $-2x \operatorname{sen}(x^2+y^2)$; $-2y \operatorname{sen}(x^2+y^2)$.

3. $\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$.

4. $3x^2+6xy+6y^2$; $3x^2+12xy+6y^2$.

5. $\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$; $\frac{-x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$. **6.** $\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{-x}{x^2+y^2}$.

7. $\frac{a}{y^2}$; $-\frac{2ax}{y^3}$. **9.** $\frac{ydx-xdy}{y^2}$.

10. $2(ax+by)dx+2(bx+cy)dy$. **11.** $\frac{y}{x}dx+\ln x dy$.

12. $(2xy+y^3)dx+(x^2+3xy^2)dy$. **13.** $e^{xy}(ydx+xdy)$.

14. $a^x e^y(\ln a dx+dy)$. **15.** 0,40 (aprox.).

16. $dV = \frac{k}{p}dT - \frac{kT}{p^2}dp.$ **17.** Los dos iguales a $5x^4$.

18. $-2x;\ -4y.$ **19.** $150\pi\delta\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$.

Capítulo 19

1. *a*) $\operatorname{sen} a + x\cos a - \frac{x^2}{2!}\operatorname{sen} a - \frac{x^3}{3!}\cos a + \cdots$

b) $\cos a - x\operatorname{sen} a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\operatorname{sen} a + \cdots$

2. $e^x\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right).$

3. $\operatorname{tg}^{-1} x + \frac{h}{1+x^2} - \frac{xh^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\frac{h^3}{3} + \cdots$

4. $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 - \cdots$

5. $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{n\pi}{2}.$

6. $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$

7. $\ln 2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 - \frac{x^4}{192} + \cdots$

8. $1 + x\ln a + \frac{x^2(\ln a)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln a)^3}{3!} + \cdots$

9. $1 - kx + \frac{k^2x^2}{2!} - \frac{k^3x^3}{3!} + \cdots$

10. $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$

11. $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \cdots$

12. $\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \cdots$ **13.** $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \cdots$

14. $-\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$.

15. $x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$

16. $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2^2x^5}{5!} + \frac{2^3x^6}{6!} + \cdots$

17. $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \cdots$

Capítulo 20

1. $y = \frac{k}{x} + c$. 2. $y = ce^{x/a}$. 3. $y = cx$.

4. $(1 + y)(1 - x) = c$. 5. $\frac{y}{x + 1} = c$.

6. $\sec x = c \sec y$. 7. $x^2 + y^2 - cy = 0$.

8. $(1 + y^2)(1 + x^2) = cx^2$. 9. $\ln x^2 y - y = c$.

10. $\frac{1 + y}{1 - y} = c \operatorname{tg} x$. 11. $(1 + y^2)(1 + x^2) = cx^2$.

12. $y = e^{(1/3)x^3 + c}$. 13. $\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{y^2 - 1} = c$.

14. $\frac{x^2}{2} + \ln x - \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} = c$. 15. $y = ce^{x^2}$. 16. $xy = c$.

17. $y + 1 = cx^2$. 18. $x^2 + 2xy = c$.

19. $y = x + 1 + ce^x$. 20. $y = ce^{-x^3/2} + 1$.

21. $y = \frac{e^x}{a + 1} + ce^{-ax}$.

22. $y \sec x = \ln(\sec x + \operatorname{tg} x) + c$.

23. $y = cx^a + \frac{x}{1 - a} - \frac{1}{a}$. 24. $y + 1 = c \operatorname{sen} x$.

25. $ye^x = x + c$. 26. $y = \frac{x}{1 - a} + \frac{1}{a} + cx^a$.

27. $y = \operatorname{tg} x - 1 + ce^{-\operatorname{tg} x}$. 28. $xy + \ln x = c$.

29. $x^2 + 2xy = c$. 30. $y = x(\ln x + c)$.

31. $\ln\sqrt{x^2+y^2}-\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}=c.$

32. $\dfrac{x}{x-y}=\ln\dfrac{y-x}{c}.$

33. $x^2-y^2=cx.$

34. $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=c.$

35. $xy(x-y)=c.$

36. $xy^2=c(x+2y).$

37. $y=ce^{y/x}.$

38. $xy^2=c(x+2y).$

39. $x^3+3x^2y-4y^3=c.$

40. $x^2+2xy+4y^2=c.$

41. $x^2+xy+y^2+x-y=c.$

42. $2xy-x^3=c.$

43. $x^3+y^3-3xy=c.$

44. $x^2y-xy^2+x^2+y^2=c.$

45. $\dfrac{x}{y}-y=c.$

46. $y=x(x+c).$

47. $\ln xy-\dfrac{1}{3}y^3=c.$

48. $\ln x+\dfrac{1}{2}\dfrac{y^2}{x^2}=c.$

49. $x^2+y^2-cy=0.$

50. $\ln xy-\dfrac{y^3}{3}=c.$

Capítulo 21

1. *a*) 36,36 cm^2. *b*) 27,795 cm^2. *c*) 20,44395 cm^2.

2. *a*) 4. *b*) 4,8666667. *c*) 0,38.

3. 4,1666667. **4.** 0,5959032. **5.** £705.

6. 99. **7.** 502,9733333.

8. *a*) 1,5165751. *b*) 2,2748626.

9. *a*) 0,0571429. *b*) 0,0571429.

10. *a*) 24,008446. *b*) 100,83547.

11. *a*) 0,8660254. *b*) 1,6094379. *c*) 0,69897.

12. *a*) 0,7071068. *b*) 1,4142136.

13. *a*) 45°. *b*) 30°. *c*) 60°.

14. *a*) $0{,}7853982^c$. *b*) $0{,}5235988^c$. *c*) $1{,}0471976^c$.

15. 1,974081; 7,2. **16.** 0,4771213; 3.

17. 0,4636476. **18.** 0,5235988.

19. 76,51; 75,1501; 75,015.

20. 0,670603; 0,7035595; 0,7067531.

21. 25,291; 45,153. **22.** 111,5251; 233,7751.

23. −7, −5, −3, 5, 25, 63.

24. Sí. **25.** Sí. **26.** Sí.

27. 4,0792014. **28.** −2,0792014. **29.** −2,25. **30.** 1,0000.

Capítulo 22

2. 124,03125. **3.** 1,00048828. **4.** 3,14142989.

6. 0,84147099. **8.** 0,84150523. **9.** 0,84147954.

10. 3,14161298. **11.** 0,058866489. **12.** Sí; 0.

13. Los resultados son mucho más cercanos.

14. Los resultados son muchos más cercanos.

TABLA 1

Medidas circulares de ángulos

	Radianes	6′ 0.1	12′ 0.2	18′ 0.3	24′ 0.4	30′ 0.5	36′ 0.6	42′ 0.7	48′ 0.8	54′ 0.9
0°	.00000	.00175	.00349	.00524	.00698	.00873	.01047	.01222	.01396	.01571
1°	.01745	.01920	.02094	.02269	.02443	.02618	.02793	.02967	.03142	.03316
2°	.03491	.03665	.03840	.04014	.04189	.04363	.04538	.04712	.04887	.05061
3°	.05236	.05411	.05585	.05760	.05934	.06109	.06283	.06458	.06632	.06807
4°	.06981	.07156	.07330	.07505	.07679	.07854	.08029	.08203	.08378	.08552
5°	.08727	.08901	.09076	.09250	.09425	.09599	.09774	.09948	.10123	.10297
6°	.10472	.10647	.10821	.10996	.11170	.11345	.11519	.11694	.11868	.12043
7°	.12217	.12392	.12583	.12741	.12915	.13090	.13265	.13439	.13614	.13788
8°	.13963	.14137	.14312	.14486	.14461	.14835	.15010	.15184	.15359	.15533
9°	.15708	.15882	.16057	.16232	.16406	.16581	.16755	.16930	.17104	.17279
10°	.17453	.17628	.17802	.17977	.18151	.18326	.18500	.18675	.18850	.19024
11°	.19199	.19373	.19548	.19722	.19897	.20071	.20246	.20420	.20595	.20769
12°	.20944	.21118	.21293	.21468	.21642	.21817	.21991	.22166	.22340	.22515
13°	.22689	.22864	.23038	.23213	.23387	.23562	.23736	.23911	.24086	.24260
14°	.24435	.24609	.24784	.24958	.25133	.25307	.25482	.25056	.25831	.26005
15°	.26180	.26354	.26529	.26704	.26878	.27053	.27227	.27402	.27576	.27751
16°	.27925	.28100	.28274	.28449	.28623	.28798	.28972	.29147	.29322	.29496
17°	.29671	.29845	.30020	.30194	.30369	.30543	.30718	.30892	.31067	.31241
18°	.31416	.31500	.31765	.31940	.32114	.32289	.32463	.32638	.32812	.32987
19°	.33161	.33336	.33510	.33685	.33859	.34034	.34208	.34383	.34558	.34732
20°	.34907	.35081	.35256	.35430	.35605	.35779	.35954	.36128	.36303	.36477
21°	.36652	.36826	.37001	.37176	.37350	.37525	.37699	.37874	.38048	.38223
22°	.38397	.38572	.38746	.38921	.39095	.39270	.39444	.39619	.39794	.39968
23°	.40143	.40317	.40492	.40666	.40841	.41015	.41190	.41364	.41539	.41713
24°	.41886	.42062	.42237	.42412	.42580	.42761	.42935	.43110	.43284	.43459
25°	.43633	.43808	.43982	.44157	.44331	.44506	.44680	.44855	.45029	.45204
26°	.45379	.45553	.45728	.45902	.46077	.46251	.46426	.46600	.46775	.46949
27°	.47124	.47298	.47473	.47647	.47822	.47997	.48171	.48346	.48520	.48695
28°	.48869	.49044	.49218	.49393	.49567	.49742	.49916	.50091	.50265	.50440
29°	.50615	.50789	.50964	.51138	.51313	.51487	.51662	.51836	.52011	.52185
30°	.52360	.52534	.52709	.52883	.53058	.53233	.53407	.53582	.53756	.53931
31°	.54105	.54280	.54454	.54629	.54803	.54978	.55152	.55327	.55501	.55676
32°	.55851	.56025	.56200	.56374	.56549	.56723	.56898	.57072	.57247	.57421
33°	.57590	.57770	.57945	.58119	.58294	.58469	.58643	.58818	.58992	.59167
34°	.59341	.59516	.59690	.59865	.60039	.60214	.60388	.60563	.60737	.60912
35°	.61087	.61261	.61436	.61610	.61785	.61959	.62134	.62308	.62483	.62657
36°	.62832	.63006	.63181	.63355	.63530	.63705	.63879	.64054	.64228	.64403
37°	.64577	.64752	.64926	.65101	.65275	.65450	.65624	.65799	.65973	.66148
38°	.66323	.66497	.66672	.66846	.67021	.67195	.67370	.67544	.67719	.67893
39°	.68068	.58242	.68417	.68591	.68766	.68941	.69115	.69290	.69464	.69639
40°	.69813	.69988	.70162	.70337	.70511	.70686	.70860	.71035	.71209	.71384
41°	.71558	.71733	.71908	.72082	.72257	.72431	.72606	.72780	.72955	.73129
42°	.73304	.73478	.73653	.73827	.74002	.74176	.74351	.74526	.74700	.74875
43°	.75049	.75224	.75398	.75573	.75747	.75922	.76096	.76271	.76445	.76620
44°	.76794	.76969	.77144	.77318	.77493	.77667	.77842	.78016	.78191	.78365

	1′	2′	3′	4′	5′
Diferencias –	29	58	87	116	145

TABLA 1 *(continuación)*

	Radianes	6′ 0.1	12′ 0.2	18′ 0.3	24′ 0.4	30′ 0.5	36′ 0.6	42′ 0.7	48′ 0.8	54′ 0.9
45°	.78540	.78714	.78889	.79063	.79238	.79412	.79587	.79762	.79936	.80111
46°	.80285	.80460	.80634	.80809	.80983	.81158	.81332	.81507	.81681	.81856
47°	.82030	.82205	.82380	.82554	.82729	.82903	.83078	.83252	.83427	.83601
48°	.83776	.83950	.84125	.84299	.84474	.84648	.84823	.84998	.85172	.85347
49°	.85521	.85696	.85870	.80045	.86219	.86394	.86568	.86743	.86917	.87092
50°	.87266	.87441	.87616	.87790	.87965	.88139	.88314	.88488	.88663	.88837
51°	.89012	.89186	.89361	.89535	.89710	.89884	.90059	.90234	.90408	.90583
52°	.90757	.90932	.91106	.91281	.91455	.91630	.91804	.91979	.92153	.92328
53°	.92502	.92677	.92852	.93026	.93201	.93375	.93550	.93724	.93899	.94073
54°	.94248	.94422	.94597	.94771	.94946	.95120	.95295	.95470	.95644	.95819
55°	.95993	.96168	.96342	.96517	.96691	.96866	.97040	.97215	.97389	.97564
56°	.97738	.97913	.98088	.98262	.98437	.98611	.98786	.98960	.99135	.99309
57°	.99484	.99658	.99833	1.00007	1.00182	1.00356	1.00531	1.00706	1.00880	1.01055
58°	1.01229	1.01404	1.01578	1.01753	1.01927	1.02102	1.02276	1.02451	1.02625	1.02800
59°	1.02974	1.03149	1.10322	1.03498	1.03673	1.03846	1.04022	1.04196	1.04371	1.04545
60°	1.04720	1.10489	1.05069	1.05243	1.05418	1.05592	1.05767	1.05941	1.06116	1.06291
61°	1.06465	1.06640	1.06814	1.06989	1.07163	1.07338	1.07512	1.07687	1.07861	1.08036
62°	1.08210	1.08385	1.08559	1.08734	1.08909	1.09083	1.09258	1.09432	1.09607	1.09781
63°	1.09956	1.10130	1.10305	1.10479	1.10654	1.10828	1.11003	1.11177	1.11352	1.11527
64°	1.11701	1.11876	1.12050	1.12225	1.12399	1.12574	1.12748	1.12923	1.13097	1.13272
65°	1.13446	1.13621	1.13795	1.13970	1.14145	1.14319	1.14494	1.14668	1.14843	1.15017
66°	1.15192	1.15366	1.15541	1.15715	1.15890	1.16064	1.16239	1.16413	1.16588	1.16763
67°	1.16937	1.17112	1.17286	1.17461	1.17635	1.17810	1.17984	1.18159	1.18333	1.18508
68°	1.18682	1.18857	1.19031	1.19206	1.19381	1.19555	1.19730	1.19904	1.20079	1.20253
69°	1.20428	1.20602	1.20777	1.20951	1.21126	1.21300	1.21475	1.21649	1.21824	1.21999
70°	1.22173	1.22348	1.22522	1.22697	1.22871	1.23046	1.23220	1.23395	1.23569	1.23744
71°	1.23918	1.24093	1.24267	1.24442	1.24617	1.24791	1.24966	1.25140	1.25315	1.25489
72°	1.25664	1.25838	1.26013	1.26187	1.26362	1.26536	1.26711	1.26885	1.27060	1.27235
73°	1.27409	1.27584	1.27758	1.27933	1.28107	1.28282	1.28456	1.28631	1.28805	1.28980
74°	1.29154	1.29329	1.29503	1.29678	1.29852	1.30027	1.30202	1.30376	1.30551	1.30725
75°	1.30900	1.31074	1.31249	1.31423	1.31598	1.31772	1.31947	1.32121	1.32296	1.32470
76°	1.32645	1.32820	1.32994	1.33169	1.33343	1.33518	1.33692	1.33867	1.34041	1.34216
77°	1.34390	1.34565	1.34739	1.34914	1.35088	1.35263	1.35438	1.35612	1.35787	1.35961
78°	1.36136	1.36310	1.36485	1.36659	1.36834	1.37008	1.37183	1.37357	1.37532	1.37706
79°	1.37881	1.38056	1.38230	1.38405	1.38579	1.38754	1.38928	1.39103	1.39277	1.39452
80°	1.39626	1.39801	1.39975	1.40150	1.40324	1.40499	1.40674	1.40848	1.41023	1.41197
81°	1.41372	1.41546	1.41721	1.41895	1.42070	1.42244	1.42419	1.42593	1.42768	1.42942
82°	1.43117	1.43292	1.43466	1.43641	1.43815	1.43990	1.44164	1.44339	1.44513	1.44688
83°	1.44862	1.45037	1.45211	1.45386	1.45560	1.45735	1.45910	1.46084	1.46259	1.46433
84°	1.46608	1.46782	1.46957	1.47131	1.47306	1.47480	1.47655	1.47829	1.48004	1.48178
85°	1.48353	1.48528	1.48702	1.48877	1.49051	1.49226	1.49400	1.49575	1.49749	1.49924
86°	1.50098	1.50273	1.50447	1.50622	1.50796	1.50971	1.51146	1.51320	1.51495	1.51669
87°	1.51844	1.52018	1.52193	1.52367	1.52542	1.52716	1.52891	1.53065	1.53240	1.53414
88°	1.53589	1.53764	1.53938	1.54113	1.54287	1.54462	1.54636	1.54811	1.54985	1.55160
89°	1.55334	1.55509	1.55683	1.55858	1.56032	1.56207	1.56382	1.56556	1.56731	1.56905

	1′	2′	3′	4′	5′
Diferencias –	29	58	87	116	145

TABLA 2

Logaritmos neperianos hiperbólicos (ln)

N.º	Tercera cifra significativa										Diferencia para la cuarta cifra significativa								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.000	0100	0108	0296	0392	0488	0583	0677	0770	0862	10	19	29	38	48	57	67	76	86
1.1	0.0953	1044	1133	1222	1310	1398	1484	1570	1655	1740	9	17	26	35	44	52	61	70	78
1.2	0.1823	1906	1989	2070	2151	2231	2311	2390	2469	2546	8	16	24	32	40	48	56	64	72
1.3	0.2624	2700	2776	2852	2927	3001	3075	3148	3221	3293	7	15	22	30	37	45	52	59	67
1.4	0.3365	3436	3507	3577	3646	3716	3784	3853	3920	3988	7	14	21	28	35	41	48	55	62
1.5	0.4055	4121	4187	4253	4318	4383	4447	4511	4574	4637	6	13	19	26	32	39	43	52	58
1.6	0.4700	4762	4824	4886	4947	5008	5068	5128	5188	5247	6	12	18	24	30	36	42	48	55
1.7	0.5306	5365	5423	5481	5539	5596	5635	5710	5766	5822	6	11	17	24	29	34	40	46	51
1.8	0.5878	5933	5988	6043	6098	6152	6206	6259	6313	6366	5	11	16	22	27	32	38	43	49
1.9	0.6419	6471	6523	6575	6627	6678	6729	6780	6831	6881	5	10	15	20	26	31	36	41	46
2.0	0.6931	6981	7031	7080	7129	7178	7227	7275	7324	7372	5	10	15	20	24	29	34	39	44
2.1	0.7419	7467	7314	7561	7608	7655	7701	7747	7793	7839	5	10	14	19	23	28	33	37	42
2.2	0.7885	7930	7975	8020	8065	8109	8154	8198	8242	3286	4	9	13	18	22	27	31	36	40
2.3	0.8329	8372	8416	8459	8502	8544	8587	8629	8671	8713	4	9	13	17	21	26	30	34	38
2.4	0.8755	8796	8838	8879	8920	8961	9002	9042	9083	9123	4	8	12	16	20	24	29	33	37
2.5	0.9163	9203	9243	9282	9322	9361	9400	9439	9478	9517	4	8	12	16	20	24	27	31	35
2.6	0.9555	9594	9632	9670	9708	9746	9783	9821	9858	9895	4	8	11	15	19	23	26	30	34
2.7	0.9933	9969	0006	0043	0080	0116	0152	0188	0225	0260	4	7	11	15	18	22	25	29	33
2.8	1.0296	0332	0367	0403	0438	0473	0508	0543	0578	0613	4	7	11	14	18	21	25	28	32
2.9	1.0647	0682	0716	0750	0784	0818	0852	0886	0919	0953	3	7	10	14	17	20	24	27	31
3.0	1.0986	1019	1053	1086	1119	1151	1184	1217	1249	1282	3	7	10	13	16	20	23	26	30
3.1	1.1314	1346	1378	1410	1442	1474	1506	1537	1569	1600	3	6	10	13	16	19	22	25	29
3.2	1.1632	1663	1694	1725	1756	1787	1817	1848	1878	1909	3	6	9	12	15	18	22	25	28
3.3	1.1939	1969	2000	2030	2060	2090	2119	2149	2179	2208	3	6	9	12	15	18	21	24	27
3.4	1.2238	2267	2296	2326	2355	2384	2413	2442	2470	2499	3	6	9	12	15	17	20	23	26
3.5	1.2528	2556	2585	2613	2641	2669	2698	2726	2754	2782	3	6	8	11	14	17	20	23	25
3.6	1.2809	2837	2865	2892	2920	2947	2975	3002	3029	3056	3	5	8	11	14	16	19	22	25
3.7	1.3083	3110	3137	3164	3191	3218	3244	3271	3297	3324	3	5	8	11	13	16	19	21	24
3.8	1.3350	3376	3403	3429	3455	3481	3507	3533	3558	3584	3	5	8	10	13	16	18	21	23
3.9	1.3610	3635	3661	3686	3712	3737	3762	3788	3813	3838	3	5	8	10	13	15	18	20	23
4.0	1.3863	3888	3913	3938	3962	3987	4012	4036	4061	4085	2	5	7	10	12	15	17	20	22
4.1	1.4110	4134	4159	4183	4207	4231	4255	4279	4303	4327	2	5	7	10	12	14	17	19	22
4.2	1.4351	4375	4398	4422	4446	4469	4493	4516	4540	4563	2	5	7	9	12	14	17	19	21
4.3	1.4586	4609	4633	4656	4679	4702	4725	4748	4770	4793	2	5	7	9	12	14	16	18	21
4.4	1.4816	4839	4861	4884	4907	4929	4951	4974	4996	5019	2	5	7	9	11	13	16	18	20
4.5	1.5041	5063	5085	5107	5129	5151	5173	5195	5217	5239	2	4	7	9	11	13	15	18	20
4.6	1.5261	5282	5304	5326	5347	5369	5390	5412	5433	5454	2	4	6	9	11	13	15	17	19
4.7	1.5476	5497	5518	5539	5560	5581	5602	5623	5644	5665	2	4	6	8	11	13	15	17	19
4.8	1.5686	5707	5728	5748	5769	5790	5810	5831	5851	5872	2	4	6	8	10	12	14	16	19
4.9	1.5892	5913	5933	5953	5974	5994	6014	6034	6054	6074	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5.0	1.6094	6114	6134	6154	6174	6194	6214	6233	6253	6273	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5.1	1.6292	6312	6332	6351	6371	6390	6409	6429	6448	6467	2	4	6	8	10	12	14	16	18
5.2	1.6487	6505	6525	6544	6563	6582	6601	6620	6639	6658	2	4	6	8	10	11	12	15	17
5.3	1.6677	6696	6715	6734	6752	6771	6790	6808	6827	6845	2	4	6	7	9	11	13	15	17
5.4	1.6864	6882	6901	6919	6938	6956	6974	6993	7011	7029	2	4	6	7	9	11	13	15	16

TABLA 2 *(continuación)*

N.º	Tercera cifra significativa										Diferencia para la cuarta cifra significativa								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	1.7047	7066	7084	7102	7120	7138	7156	7174	7192	7120	2	4	5	7	9	11	13	14	16
5.6	1.7228	7246	7263	7281	7299	7317	7334	7352	7370	7387	2	4	5	7	9	11	12	14	16
5.7	1.7405	7422	7440	7457	7475	7492	7509	7527	7544	7561	2	3	5	7	9	10	12	14	16
5.8	1.7579	7596	7613	7630	7647	7664	7681	7699	7716	7733	2	3	5	7	9	10	12	14	15
5.9	1.7750	7766	7783	7800	7817	7834	7851	7867	7884	7901	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6.0	1.7918	7934	7951	7967	7984	8001	8017	8034	8050	8066	2	3	5	7	8	10	12	13	15
6.1	1.8083	8099	8116	8132	8148	8165	8181	8197	8213	8229	2	3	5	6	8	10	11	13	15
6.2	1.8245	8262	8278	8294	8310	8326	8342	8358	8374	8390	2	3	5	6	8	10	11	13	14
6.3	1.8405	8421	8437	8453	8469	8465	8500	8516	8532	8547	2	3	5	6	8	9	11	13	14
6.4	1.8563	8579	8594	8610	8625	8641	8656	8672	8687	8743	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6.5	1.8718	8733	8749	8764	8779	8795	8810	8825	8840	8856	2	3	5	6	8	9	11	12	14
6.6	1.8871	8886	8901	8916	8931	8946	8961	8976	8991	9006	2	3	5	6	8	9	11	12	13
6.7	1.9021	9036	9051	9066	9081	9095	9110	9125	9140	9155	1	3	4	6	7	9	10	12	13
6.8	1.9169	9184	9199	9213	9228	9242	9257	9272	9286	9301	1	3	4	6	7	9	10	12	13
6.9	1.9315	9330	9344	9359	9373	9387	9402	9416	9430	9445	1	3	4	6	7	9	10	12	13
7.0	1.9459	9473	9488	9502	9516	9530	9544	9559	9573	9587	1	3	4	6	7	9	10	11	13
7.1	1.9601	9615	9629	9643	9657	9671	9685	9699	9713	9272	1	3	4	6	7	8	10	11	12
7.2	1.9741	9755	9769	9782	9796	9810	9824	9838	9851	9865	1	3	4	6	7	8	10	11	12
7.3	1.9879	9892	9906	9920	9933	9947	9961	9974	9988	0001	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7.4	2.0015	0028	0042	0055	0069	0082	0096	0109	0122	0136	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7.5	2.0149	0162	0176	0189	0202	0215	0229	0242	0255	0268	1	3	4	5	7	8	9	11	12
7.6	2.0281	0295	0308	0321	0334	0347	0360	0373	0386	0399	1	3	4	5	7	8	9	10	12
7.7	2.0412	0425	0438	0451	0464	0477	0490	0503	0516	0528	1	3	4	5	6	8	9	10	12
7.8	2.0541	0554	0567	0580	0592	0605	0618	0631	0643	0656	1	3	4	5	6	8	9	10	11
7.9	2.0669	0681	0694	0707	0719	0732	0744	0757	0769	0782	1	3	4	5	6	8	9	10	11
8.0	2.0794	0807	0819	0832	0844	0857	0869	0882	0894	0906	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8.1	2.0919	0931	0943	0956	0968	0980	0992	1005	1017	1029	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8.2	2.1041	1054	1066	1078	1090	1102	1114	1126	1138	1150	1	2	4	5	6	7	9	10	11
8.3	2.1163	1175	1187	1199	1211	1223	1235	1247	1258	1270	1	2	4	5	6	7	8	10	11
8.4	2.1282	1294	1306	1318	1330	1342	1353	1365	1377	1389	1	2	4	5	6	7	8	9	11
8.5	2.1401	1412	1424	1436	1448	1459	1471	1483	1494	1506	1	2	4	5	6	7	8	9	11
8.6	2.1518	1529	1541	1552	1564	1576	1587	1599	1610	1622	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8.7	2.1633	1645	1656	1668	1679	1691	1702	1713	1725	1736	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8.8	2.1748	1759	1770	1782	1793	1804	1815	1827	1838	1849	1	2	3	5	6	7	8	9	10
8.9	2.1861	1872	1883	1894	1905	1917	1928	1939	1950	1961	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9.0	2.1972	1983	1994	2006	2017	2028	2039	2050	2061	2072	1	2	3	4	6	7	8	9	10
9.1	2.2083	2094	2105	2116	2127	2138	2148	2159	2170	2181	1	2	3	4	5	7	8	9	10
9.2	2.2192	2203	2214	2225	2235	2246	2257	2268	2279	2289	1	2	3	4	5	6	8	9	10
9.3	2.2300	2311	2322	2332	2343	2354	2364	2375	2386	2396	1	2	3	4	5	6	7	9	10
9.4	2.2407	2418	2428	2439	2450	2460	2471	2481	2492	2502	1	2	3	4	5	6	7	8	10
9.5	2.2513	2523	2534	2544	2555	2565	2576	2586	2597	2607	1	2	3	4	5	6	7	8	0
9.6	2.2618	2628	2638	2649	2569	2670	2680	2690	2701	2711	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.7	2.2721	2732	2742	2752	2762	2773	2783	2793	2803	2814	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.8	2.2824	2834	2844	2854	2865	2875	2885	2895	2905	2915	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.9	2.2925	2935	2946	2956	2966	2976	2986	2996	3006	3016	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ln 10 = 2.3026. ln 1.000 = 6.9078.
ln = 100 = 4.6052. ln 10.000 = 9.2103.

TABLA 3

Funciones hiperbólicas

x	e^x	e^{-x}	Sh x	Ch x	x	e^x	e^{-x}	Sh x	Ch x
.00	1.0000	1.0000	0	1.0000	.50	1.6487	.6065	.5211	1.1276
.01	1.0101	.9900	.0100	1.0001	.51	1.6653	.6005	.5324	1.1329
.02	1.0202	.9802	.0200	1.0002	.52	1.6820	.5945	.5438	1.1383
.03	1.0305	.9704	.0300	1.0005	.53	1.6989	.5886	.5552	1.1438
.04	1.0408	.9608	.0400	1.0008	.54	1.7160	.5827	.5666	1.1494
.05	1.0513	.9512	.0500	1.0013	.55	1.7333	.5769	.5782	1.1551
.06	1.0618	.9418	.0600	1.0018	.56	1.7507	.5712	.5897	1.1609
.07	1.0725	.9324	.0701	1.0025	.57	1.7683	.5655	.6014	1.1669
.08	1.0833	.9231	.0801	1.0032	.58	1.7860	.5599	.6131	1.1730
.09	1.0942	.9139	.0901	1.0041	.59	1.8040	.5543	.6248	1.1792
.10	1.1052	.9048	.1002	1.0050	.60	1.8221	.5488	.6367	1.1855
.11	1.1163	.8958	.1102	1.0061	.61	1.8404	.5434	.6485	1.1919
.12	1.1275	.8869	.1203	1.0072	.62	1.8589	.5379	.6605	1.1984
.13	1.1388	.8781	.1304	1.0085	.63	1.8776	.5326	.6725	1.2051
.14	1.1503	.8694	.1405	1.0098	.64	1.8965	.5273	.6846	1.2119
.15	1.1618	.8607	.1506	1.0113	.65	1.9155	.5220	.6967	1.2188
.16	1.1735	.8521	.1607	1.0128	.66	1.9348	.5169	.7090	1.2258
.17	1.1853	.8437	.1708	1.0145	.67	1.9542	.5117	.7213	1.2330
.18	1.1972	.8353	.1810	1.0162	.68	1.9739	.5066	.7336	1.2402
.19	1.2092	.8270	.1911	1.0181	.69	1.9937	.5016	.7461	1.2476
.20	1.2214	.8187	.2013	1.0201	.70	2.0138	.4966	.7586	1.2552
.21	1.2337	.8106	.2115	1.0221	.71	2.0340	.4916	.7712	1.2628
.22	1.2461	.8025	.2218	1.0243	.72	2.0544	.4868	.7838	1.2706
.23	1.2586	.7945	.2320	1.0266	.73	2.0751	.4819	.7966	1.2785
.24	1.2712	.7866	.2423	1.0289	.74	2.0959	.4771	.8094	1.2865
.25	1.2840	.7788	.2526	1.0314	.75	2.1170	.4724	.8223	1.2947
.26	1.2969	.7711	.2629	1.0340	.76	2.1383	.4677	.8353	1.3030
.27	1.3100	.7634	.2733	1.0367	.77	2.1598	.4630	.8484	1.3114
.28	1.3231	.7558	.2837	1.0395	.78	2.1815	.4584	.8615	1.3199
.29	1.3364	.7483	.2941	1.0423	.79	2.2034	.4538	.8748	1.3286
.30	1.3499	.7408	.3045	1.0453	.80	2.2255	.4493	.8881	1.3374
.31	1.3634	.7334	.3150	1.0484	.81	2.2479	.4449	.9015	1.3464
.32	1.3771	.7261	.3255	1.0516	.82	2.2705	.4404	.9150	1.3555
.33	1.3910	.7189	.3360	1.0549	.83	2.2933	.4360	.9286	1.3647
.34	1.4049	.7118	.3466	1.0584	.84	2.3164	.4317	.9423	1.3740
.35	1.4191	.7047	.3572	1.0619	.85	2.3396	.4274	.9561	1.3835
.36	1.4333	.6977	.3678	1.0655	.86	2.3632	.4232	.9700	1.3932
.37	1.4477	.6907	.3785	1.0692	.87	2.3869	.4190	.9840	1.4029
.38	1.4623	.6839	.3892	1.0731	.88	2.4109	.4148	.9981	1.4128
.39	1.4770	.6771	.4000	1.0770	.89	2.4351	.4107	1.0122	1.4229
.40	1.4918	.6703	.4108	1.0811	.90	2.4596	.4066	1.0265	1.4331
.41	1.5068	.6637	.4216	1.0852	.91	2.4843	.4025	1.0409	1.4434
.42	1.5220	.6570	.4325	1.0895	.92	2.5093	.3985	1.0554	1.4539
.43	1.5373	.6505	.4434	1.0939	.93	2.5345	.3946	1.0700	1.4645
.44	1.5527	.6440	.4543	1.0984	.94	2.5600	.3906	1.0847	1.4753
.45	1.5683	.6376	.4653	1.1030	.95	2.5857	.3867	1.0995	1.4862
.46	1.5841	.6313	.4764	1.1077	.96	2.6117	.3829	1.1144	1.4973
.47	1.6000	.6250	.4875	1.1125	.97	2.6379	.3791	1.1294	1.5085
.48	1.6161	.6188	.4986	1.1174	.98	2.6645	.3753	1.1446	1.5199
.49	1.6323	.6126	.5098	1.1225	.99	2.6912	.3716	1.1598	1.5314

TABLA 3 *(continuación)*

x	e^x	e^{-x}	Sh x	Ch x	x	e^x	e^{-x}	Sh x	Ch x
1.00	2.7183	.3679	1.1752	1.5431	3.50	33.115	.0302	16.543	16.573
1.05	2.8577	.3499	1.2539	1.6038	3.55	34.813	.0287	17.392	17.421
1.10	3.0042	.3329	1.3356	1.6685	3.60	36.598	.0273	18.285	18.313
1.15	3.1582	.3166	1.4208	1.7374	3.65	38.475	.0260	19.224	19.250
1.20	3.3201	.3012	1.5095	1.8107	3.70	40.447	.0247	20.211	20.236
1.25	3.4903	.2865	1.6019	1.8884	3.75	42.521	.0235	21.249	21.727
1.30	3.6693	.2725	1.6984	1.9709	3.80	44.701	.0224	22.339	22.362
1.35	3.8574	.2592	1.7991	2.0583	3.85	46.993	.0213	23.486	23.507
1.40	4.0552	.2466	1.9043	2.1509	3.90	49.402	.0202	24.691	24.711
1.45	4.2631	.2346	2.0143	2.2488	3.95	51.935	.0193	25.958	25.977
1.50	4.4817	.2231	2.1293	2.3524	4.0	54.598	.0183	27.290	27.308
1.55	4.7115	.2122	2.2496	2.4619	4.05	57.397	.0174	28.690	28.707
1.60	4.9530	.2019	2.3756	2.5775	4.10	60.340	.0166	30.162	30.178
1.65	5.2070	.1920	2.5075	2.6995	4.15	63.434	.1058	31.709	31.725
1.70	5.4739	.1827	2.6456	2.8283	4.20	66.686	.1050	33.336	33.351
1.75	5.7546	.1738	2.7904	2.9642	4.25	70.105	.0143	35.046	35.060
1.80	6.0496	.1653	2.9422	3.1075	4.30	73.700	.0136	36.843	36.857
1.85	6.3598	.1572	3.1013	3.2585	4.35	77.478	.0129	38.733	38.746
1.90	6.6859	.1496	3.2682	3.4177	4.40	81.451	.0123	40.719	40.732
1.95	7.0287	.1423	3.4432	3.5855	4.45	85.627	.0117	42.808	42.819
2.00	7.3891	.1353	3.6269	3.7622	4.50	90.017	.0111	45.003	45.014
2.05	7.7679	.1287	3.8196	3.9483	4.55	94.632	.0106	47.311	47.332
2.10	8.1662	.1225	4.0219	4.1443	4.60	99.484	.0101	49.737	49.747
2.15	8.5849	.1165	4.2342	4.3507	4.65	104.59	.00956	52.288	52.297
2.20	9.0250	.1108	4.4571	4.5679	4.70	109.95	.00910	54.969	54.978
2.25	9.4877	.1054	4.6913	4.7966	4.75	115.58	.00865	57.788	57.796
2.30	9.9742	.1003	4.9370	5.0372	4.80	121.51	.00823	60.751	60.759
2.35	10.486	.0954	5.1951	5.2905	4.85	127.74	.00783	63.866	63.874
2.40	11.023	.0907	5.4662	5.5570	4.90	134.29	.00745	67.141	67.149
2.45	11.588	.0863	5.7510	5.8373	4.95	141.17	.00708	70.584	70.591
2.50	12.182	.0821	6.0502	6.1323	5.00	148.41	.00674	74.203	74.210
2.55	12.807	.0781	6.3645	6.4426	5.05	156.02	.00641	78.008	78.014
2.60	13.646	.0743	6.6947	6.7690	5.10	164.02	.00610	82.008	82.104
2.65	14.154	.0707	7.0417	7.1123	5.15	172.43	.00580	86.213	86.219
2.70	14.880	.0672	7.4063	7.4735	5.20	181.27	.00552	90.633	90.639
2.75	15.643	.0629	7.7894	7.8533	5.25	190.57	.00525	95.280	95.286
2.80	16.445	.0608	8.1919	8.2527	5.30	200.34	.00499	100.17	100.17
2.85	17.288	.0578	8.6150	8.6728	5.35	210.61	.00475	105.30	105.31
2.90	18.174	.0550	9.0596	9.1146	5.40	221.41	.00452	110.70	110.71
2.95	19.106	.0523	9.5268	9.5791	5.45	232.76	.00430	116.38	116.38
3.00	20.086	.0498	10.018	10.068	5.50	244.69	.00409	122.34	122.35
3.05	21.115	.0474	10.534	10.581	5.55	257.24	.00389	128.62	128.62
3.10	22.198	.0450	11.076	11.122	5.60	270.43	.00370	135.21	135.22
3.15	23.336	.0429	11.647	11.689	5.65	284.29	.00352	142.14	142.15
3.20	24.533	.0408	12.246	12.287	5.70	298.87	.00335	149.43	149.44
3.25	25.790	.0388	12.876	12.915	5.75	314.19	.00318	157.09	157.10
3.30	27.113	.0369	13.538	13.575	5.80	330.30	.00303	165.15	165.15
3.35	28.503	.0351	14.234	14.269	5.85	347.23	.00288	173.62	173.62
3.40	29.964	.0334	14.965	14.999	5.90	365.04	.00274	182.52	182.52
3.45	31.500	.0317	15.734	15.766	5.95	383.75	.00261	191.88	191.88
					6.00	403.43	.00248	201.71	201.72